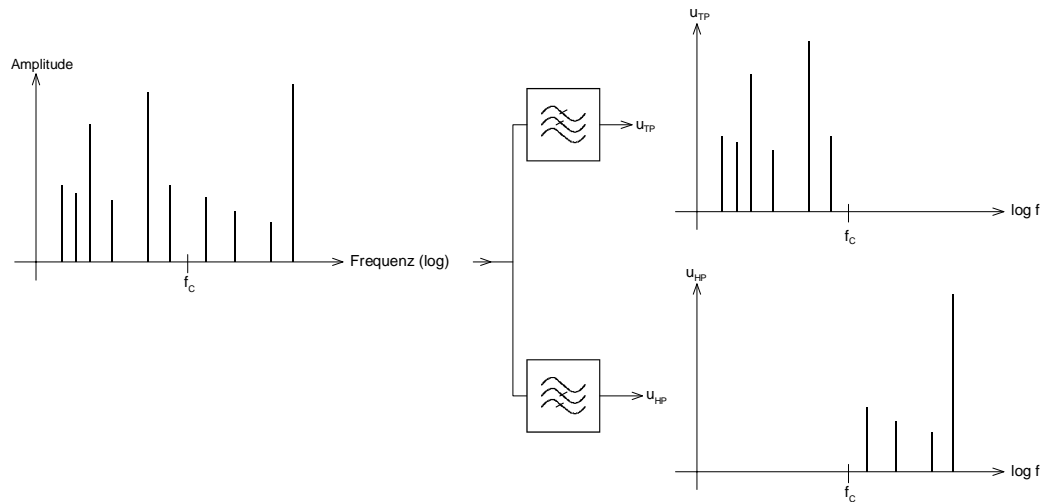


### 3 Aktive und passive Filter

Filter dienen primär zum selektiven Ausfiltern von Frequenzen aus dem Spektrum.



**Bild 3-1:**  
Ausfiltern von Signalen aus dem Spektrum mit Tief- und Hochpassfilter.

Daraus abgeleitet, können Filter auch zur Impulsformung, Trennung oder Unterdrückung von Frequenzen verwendet werden. Passive Filter werden vielfach auch zur Impedanzanpassung im HF-Bereich benutzt.

Das Filter selbst stellt ein lineares Übertragungssystem dar, das mit seiner Übertragungsfunktion mit allen Eigenschaften beschrieben werden kann.

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ms^m}{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ns^n} \quad (3-1)$$

Die Lage und Anzahl der Pole/Nullstellen der rationalen Funktion in Gl. (3-1) beschreiben den Amplituden- und Phasenverlauf vollständig. Die Filtertheorie hat nun zum Ziel, aus gegebenen Filteranforderungen diese Pole/Nullstellen und daraus die Polynomkoeffizienten zu bestimmen. Aus diesen kann dann direkt ein anforderungsoptimales Filter realisiert werden.

Ziel der Filterdimensionierung ist es immer eine möglichst einfache, d.h. ordnungsminimale, präzise, stabile und gut realisierbare Lösung zu finden.

Die Filteranforderungen umfassen neben Anforderungen für den Durchlass- und Sperrbereich fallweise auch andere Vorgaben wie konstante Gruppenlaufzeit, max. Überschwingen, max. Flankensteilheit, u.a. Da das ideale Filter nicht existiert, müssen beim Entwurf Kompromisse eingegangen werden. Zur Filtersynthese benutzt man eine der bekannten Filtercharakteristiken (Bessel, Butterworth, Tschebyscheff,...), die die Anforderungen hinreichend gut abdecken.

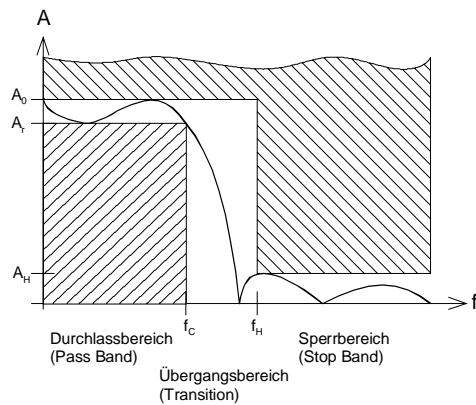
Die Synthese, d.h. Berechnung der Polynomkoeffizienten, kann entweder direkt mathematisch oder mit Hilfe normierter Tabellen erfolgen. Filtersyntheseprogramme erlauben eine vollständige Dimensionierung mit Berücksichtigung der Toleranzen.

Aktive Filter verkörpern eine Realisation mit aktiven Bauelementen, im Regelfall Operationsverstärker. Sie erlauben eine „spulenlose“ Realisation von Filtern aller Charakteristiken bis zu Frequenzen von einigen 100kHz.

### 3.1 Filteranforderungen

Die Anforderungen an das Filter werden mit Filterschablonen im Frequenz- und Zeitbereich definiert.

Sie legen die minimalen Anforderungen und erlaubten Toleranzen fest. Die Filtersynthese sollte dann das einfachste Filter liefern, das diese Anforderungen gerade noch erfüllt.



**Bild 3-2:**

Filterschablone zur Spezifikation der Dämpfungsanforderung. Die schraffierten Bereiche sind verbotene Bereiche, d.h. der Amplitudengang muss sich innerhalb der nichtschraffierten Zone bewegen.

Analog können für das Überschwingen bei der Sprungantwort, den Phasengang und für die Gruppenlaufzeit Schablonen vorgegeben werden.

Legende zu den Symbolen in der Dämpfungsschablone:

$A_0$ : Durchgangsdämpfung oder Verstärkung. Meist in dB spezifiziert.

$A_r$ : Zugelassene Welligkeit im Durchlassbereich. Meist in dB spezifiziert.

$A_c$ : Dämpfung bei der Durchlass-Grenzfrequenz  $f_c$ . Meist in dB spezifiziert.

$A_H$ : Minimale Sperrdämpfung. Meist in dB spezifiziert.

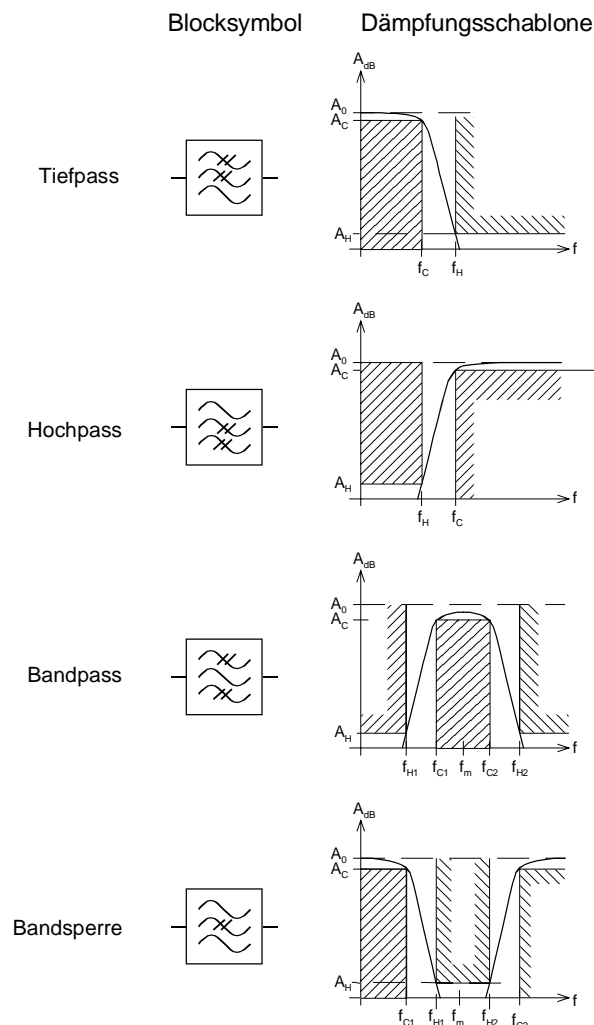
$f_c$ : Durchlass-Grenzfrequenz. Frequenz bei der die Welligkeit  $A_r$  erstmals überschritten wird. Bei Filter ohne Welligkeit im Durchlass ist dies die  $-3\text{dB}$ -Frequenz. In Hz oder rad/s spezifiziert.

$f_H$ : Sperr-Grenzfrequenz. Frequenz, bei der die Sperrdämpfung erreicht werden muss. In Hz oder rad/s spezifiziert.

Normalerweise wird etwas Welligkeit im Durchlassbereich zugelassen, da dies den Entwurf wesentlich selektiverer Filter erlaubt (Tschebyscheff-Filter). Dies trifft auch für den Sperrbereich zu. Die Synthese und Realisation von Filtern mit Welligkeit im Sperrbereich ist aber wesentlich aufwändiger (Inverse Tschebyscheff, Elliptische Filter).

### 3.2 Filtertypen

Man unterscheidet anhand des Amplitudenganges vier Grundformen:



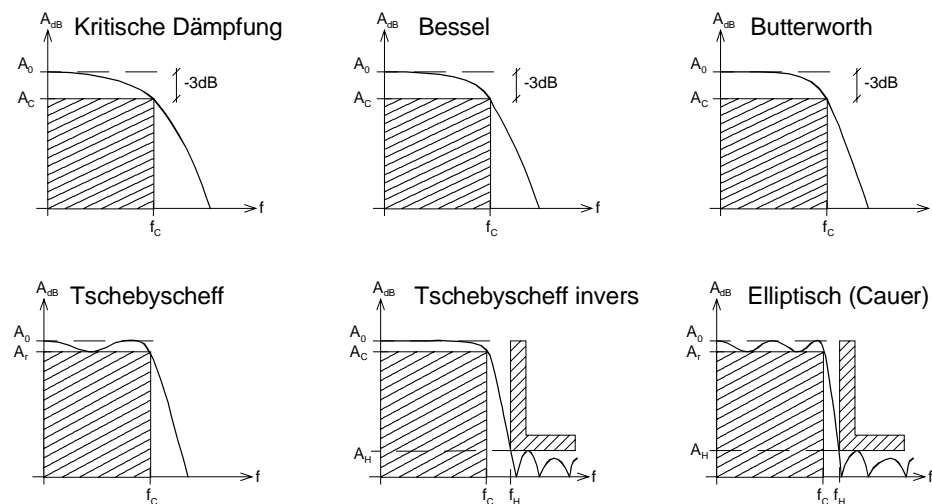
**Bild 3-3:**  
Dämpfungsschablonen und Blocksymbole  
der vier Filter-Grundtypen

Das Tiefpassfilter stellt das Grundfilter dar. Alle anderen Typen können aus dem Tiefpassfilter über Transformationen abgeleitet werden.

### 3.3 Filtercharakteristiken

Sie werden anhand des Amplitudenverlaufs im Durchlass- und Sperrbereich unterschieden. Man beurteilt dabei primär die Welligkeit im Durchlass und Sperrbereich und Flankensteilheit. Generell haben Filter mit Welligkeit eine grössere Flankensteilheit, dafür aber schlechteres Impuls- und Gruppenlaufzeitverhalten.

Die hauptsächlich verwendeten Charakteristiken sind:



**Bild 3-4:**  
Amplitudenverlauf verschiedener Tiefpasscharakteristiken

### Kritische Dämpfung

Filter mit kritischer Dämpfung entstehen durch rückwirkungsfrei kaskadierte RC-Glieder. Sie haben in der Filtertechnik keine Bedeutung, da die erreichbare Flankensteilheit pro Filterordnung klein ist.

### Bessel

Bessel-Filter haben keine Welligkeit im Durchlassbereich, konstante Gruppenlaufzeit und dadurch ein gutes Impulsverhalten. Hohe Flankensteilheiten bedingen hohe Filterordnungen. Sie werden deshalb nur in Spezialfällen eingesetzt.

### Butterworth

Butterworth-Filter haben keine Welligkeit im Durchlass- und Sperrbereich. Der Amplitudengang läuft flach bis fast zur Grenzfrequenz und fällt dann maximal steil ab. Im Zeitbereich zeigen sie in der Sprungantwort leichtes Überschwingen und eine nicht konstante Gruppenlaufzeit. Das Butterworth-Filter ist das Standardfilter wenn keine Welligkeit im Durchlassbereich zugelassen wird. Ausserdem sind sie sehr einfach zu dimensionieren und zu realisieren.

### Tschebyscheff

Tschebyscheff-Filter haben Welligkeit im Durchlassbereich dafür aber eine grössere Flankensteilheit. Grundsätzlich wird die Flankensteilheit grösser, je grösser die Welligkeit gewählt wird. Standardwerte für Welligkeiten sind 0.01, 0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 3dB.

Das Tschebyscheff-Filter (auch Tschebyscheff I) ist das einfachste Filter wenn Welligkeit im Durchlassbereich zugelassen wird. Die Dimensionierung und Realisierung ist ebenfalls einfach.

### Tschebyscheff invers

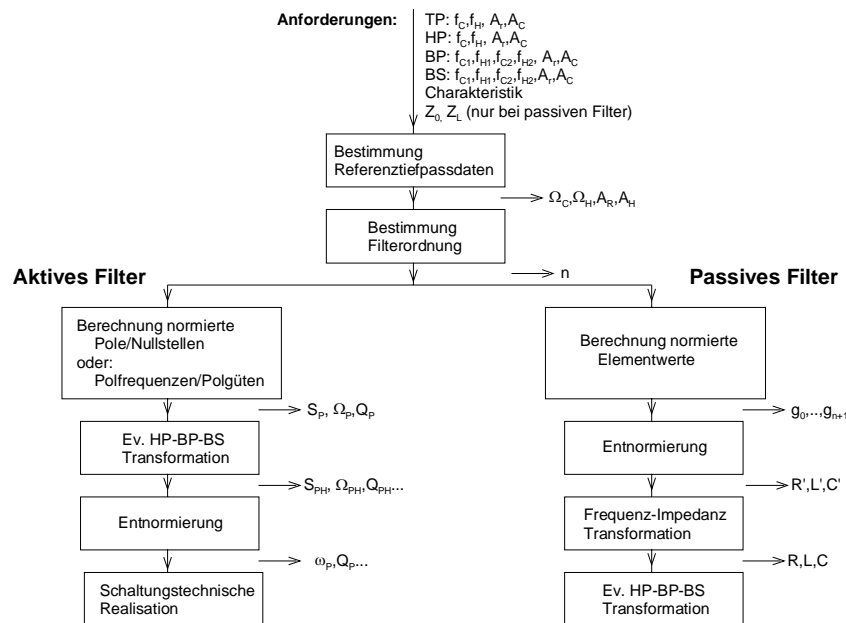
Das inverse Tschebyscheff-Filter (auch Tschebyscheff II) zeigt einen flachen Amplitudengang im Durchlass-, aber Welligkeit im Sperrbereich. Das Gruppenlaufzeitverhalten ist daher etwas besser als beim normalen Tschebyscheff I. Die Berechnung ist einfach, die Realisation wird aber aufwändiger, da die Nullstellen der Übertragungsfunktion auch realisiert werden müssen.

### Elliptisch

Die elliptischen Filter haben die grösstmögliche Flankensteilheit (bei gleicher Filterordnung). Sie zeigen Welligkeit im Durchlass- und Sperrbereich, die aber bei der Dimensionierung spezifiziert werden kann. Die Berechnung ist sehr aufwändig, die Implementierung verlangt ebenfalls Schaltungen die endlichen Nullstellen, d.h. Dämpfungspole, realisieren. Die Dimensionierung dieses Typs wird normalerweise mit einem Filtersyntheseprogramm durchgeführt.

### 3.4 Filterentwurf

Der Entwurf und Realisation von Filter geht immer nach demselben Schema vonstatten:



**Bild 3-5:** Schritte beim Filterentwurfsprozess.

Aus den Anforderungen werden die Spezifikationen für den Referenziefpass abgeleitet. Es ist zweckmässig bis zur Dimensionierung der Elemente sämtliche Berechnungen normiert ( $\Omega_C=1\text{rad/s}$ ) durchzuführen.

Auch für die Synthese von passiven Filtern werden die gewünschten Filtertypen normalerweise in TP-Filter transformiert, als TP-Prototypfilter synthetisiert und anschliessend wieder in die Originalform mit gleichzeitiger Impedanz- und Frequenztransformation zurückgewandelt. Diese Methode erlaubt auch die Verwendung von Tabellen normierter Filterelemente (Filterkataloge).

### 3.5 Praktische Realisation von Filterschaltungen

Filterschaltungen lassen sich passiv mit RLC-Netzwerken realisieren. Diese Form ist vor allem für HF-Anwendungen interessant, da dort die Induktivitäten klein und damit einfach realisierbar werden.

Für tiefere Frequenzen wird aktive Schaltungstechnik ohne Induktivitäten mit Operationsverstärkern bevorzugt. Durch den Einsatz von Operationsverstärker kann das Filter induktivitätslos realisiert werden. Damit geht man den Schwierigkeiten grosser Induktivitäten aus dem Weg (Platz, Abgleich, Alterung, Preis)

Die passive Schaltungstechnik wurde bereits Anfangs bis Mitte 20. Jahrhundert umfassend begründet. Für oft benötigte Filterstrukturen mit Butterworth und Tschebyscheff-Charakteristik stehen einfache Formeln zur Bestimmung der Elementwerte zur Verfügung.

Die allgemeine Herleitung der Elementwerte aus der Übertragungsfunktion wollen wir in den Grundzügen nachfolgend auf der Basis der Betriebsübertragungsfunktion begründen.

### 3.5.1 Betriebsübertragungsfunktion

Die Betriebsübertragungsfunktion  $S_{21}$  verkörpert das Übertragungsverhalten eines Vierpoles, der mit zwei Widerständen abgeschlossen wird. Die Betrachtung erfolgt in Anlehnung an die Ausführungen in [MIL92].

Die Beschreibung der Betriebsübertragungsfunktion  $S_{21}$  erfolgt durch Berücksichtigung der ein- und ausgangsseitigen Abschlusswiderstände  $Z_0$  und  $Z_L$ :

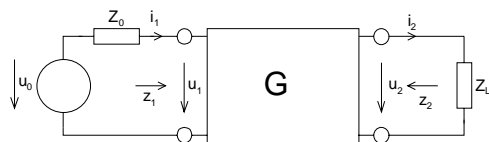


Bild 3-6: Schaltung zur Definition der Betriebsübertragungsfunktion  $S_{21}$ .

$$S_{21} = 2 \sqrt{\frac{Z_0}{Z_L}} \cdot G = 2 \sqrt{\frac{Z_0}{Z_L}} \cdot \frac{u_2}{u_0} \quad (3-2)$$

wobei  $G$  die bekannte Spannungsübertragungsfunktion ist:

$$G = \frac{u_2}{u_0} \quad (3-3)$$

$Z_0$  verkörpert als Quellenwiderstand die Bezugsimpedanz des Systems. In der Praxis ist  $50\Omega$  ein Standardwert. Die Indexnotation zeigt, dass es sich bei  $S_{21}$  um eine Komponente der Streuparametermatrix  $S$  handelt. Diese Parametermatrix beinhaltet die Reflektions- und Transmissionfaktoren zur Bezugsimpedanz  $Z_0$ .

In (3-2) erkennt man, dass  $S_{21}$  mit einem konstanten Faktor multiplizierte „normale“ Übertragungsfunktion ist.

Eine analytische Bestimmung von  $S_{21}$  ist aus bekannter Kettenparametermatrix des Übertragungsvierpoles möglich:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ i_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} u_1 &= u_0 - i_1 Z_0 \\ u_2 &= i_2 Z_L \end{aligned} \quad (3-4)$$

$$S_{21} = \frac{2}{A_{11} \sqrt{\frac{Z_L}{Z_0}} + A_{12} \frac{1}{\sqrt{Z_0 Z_L}} + A_{21} \sqrt{Z_0 Z_L} + A_{22} \sqrt{\frac{Z_L}{Z_0}}}$$

Die Eingangsimpedanz  $Z_1$  wird mit Kettenparameter:

$$Z_1 = \frac{A_{11} Z_L + A_{12}}{A_{21} Z_L + A_{22}} \quad (3-5)$$

Bei bekannten Z-Parameter des Übertragungsvierpoles wird die Betriebsübertragungsfunktion:

$$S_{21} = \frac{2Z_{21}\sqrt{Z_0Z_L}}{(Z_{11} + Z_0)(Z_{22} + Z_L) - Z_{12}Z_{21}} \quad (3-6)$$

Darstellungen für andere Parametervorgaben sind mit den bekannten Umrechnungsformeln möglich. Gleichung (3-6) definiert  $S_{21}$  als rationale Funktion. Die Pole müssen aus Stabilitätsgründen alle in der linken s-Halbebene liegen und der Grad des Zählerpolynoms darf nicht grösser sein als der Grad des Nennerpolynoms.

Bei passiven Übertragungsvierpolen kann der Betrag der Betriebsübertragungsfunktion nicht grösser als 1 werden.

Grundsätzlich wird die grösste Leistung an die Last  $Z_L$  abgegeben, wenn Leistungsanpassung  $Z_0 = Z_L$  herrscht. In diesem Fall wird die eingespeisene Leistung  $P_{max}$  und die am Vierpol anliegende Eingangsspannung  $u_1$ :

$$P_{max} = \frac{|u_0|^2}{4Z_0} \quad u_1 = \frac{u_0}{2} \quad (3-7)$$

Bei einem verlustfreien Vierpol wird dann Abschlusswiderstand  $Z_L$  die Leistung  $P_2$  verbraucht:

$$P_2 = \frac{|u_2|^2}{Z_L} \quad (3-8)$$

Für den Betrag von  $S_{21}$  gilt unter Anwendung von (3-7), (3-8) in (3-2):

$$|S_{21}|^2 = 4 \frac{Z_0}{Z_L} \frac{|u_2|^2}{|u_0|^2} = \frac{P_2}{P_{max}} \quad (3-9)$$

### 3.5.2 Bestimmung der Elementwerte

Die nachfolgenden Ausführungen sollen zeigen, wie für eine gegebene Betriebsübertragungsfunktion eine mögliche Schaltung mit passiven Elementen R, L, C synthetisiert werden kann.

Betriebsübertragungsfunktionen für Filter können immer als rationale Funktionen mit reellen Koeffizienten dargestellt werden. Diese sind in Leiterstruktur realisierbar. Das allgemein gültige Vorgehen beruht auf dem Abspalten von Grundelementen R, L und C aus der Eingangsimpedanzfunktion  $z_i(s)$  (vgl. auch [ZVE67]).

Für Filter höherer Ordnung wird dieses Vorgehen rasch aufwändig. Jedoch lassen sich für Butterworth- und Tschebyscheff-1 Filter einfache Gleichungen für die Elementwerte herleiten, die eine einfache Synthese des gesamten Filternetzwerkes ermöglichen.

Grundsätzlich reicht es ein Tiefpassschaltung zu synthetisieren, da alle anderen Typen über Transformationen abgeleitet werden können. Bei der Realisation sind immer zwei Lösungen (Duale Lösungen) möglich, je nachdem ob das erste Element in Serie oder Parallel zum Eingang liegt.

Die Eingangsimpedanz  $z_1(s)$  kann für eine maximal flache Spannungsübertragungsfunktion  $G(s)$  für gleicher Quellen- und Lastimpedanz ( $Z_0=Z_L$ ) dargestellt werden [TAY88]:

$$z_1(s) = \frac{D(s) - s^n}{D(s) + s^n} \quad (3-10)$$

Hierbei ist  $D(s)$  der Nenner der zu realisierenden Spannungsübertragungsfunktion  $G(s)$  und  $n$  der Grad des Nennerpolynoms. Das Abspalten der Elemente erfolgt durch Kettenbruchentwicklung.

Soll das Netzwerk ohne Last betrieben werden, gilt  $Z_L \rightarrow \infty$ . Die Eingangsimpedanz wird für eine maximal flache Übertragungsfunktion, die ausschliesslich Pole enthält:

$$z_1(s) = \frac{D(s \text{ gerade})}{D(s \text{ ungerade})} \quad (3-11)$$

Im Zähler werden alle geraden Potenzen zu  $s$  aufgeführt, im Nenner alle ungeraden Potenzen zu  $s$ .

Für den Fall dass  $Z_L \neq Z_0$  aber  $Z_L < \infty$ , kann über den Ansatz mit  $Z_L = Z_0$  nach (3-10) realisiert werden, indem eine Norton-Transformation angewandt wird.

Für die allgemeine Herleitung von Impedanzfunktionen und Matrizen sei auf die zahlreiche Literatur verwiesen, besonders informativ sind [CHE95], Kap. 71/72 und [MIL91], Kap.4.4.

### Beispiel 3-1: Synthese Elementwerte für Butterworth 3. Ordnung

Ein normiertes Butterworth Tiefpassfilter 3. Ordnung hat die Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

(Normiert heisst Grenzfrequenz 1 rad/s, Bezugsimpedanz  $1\Omega$ )

Lösung:

Der Nenner wird  $D(s) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1$ . Durch Einsetzen in (3-10) findet man die Eingangsimpedanz:

$$z_1(s) = \frac{2s^2 + 2s + 1}{2s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

$z_1$  wird nun so formuliert, dass der Nenner einen unechten Bruch darstellt, d.h. ein Verhältnis eines Polynoms höheren Grades zu einem Polynom niedrigen Grades. Die Division des unechten Bruches ergibt:

$$z_1(s) = \frac{1}{\frac{2s^3 + 2s^2 + 2s + 1}{2s^2 + 2s + 1}} = \frac{1}{s + \frac{s + 1}{2s^2 + 2s + 1}}$$

Das Verfahren der Inversion/Division wird nun für den Divisionrest wiederholt und man erhält für dieses Beispiel bereits den vollständigen Kettenbruch:



$$z_1(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{\frac{2s^2 + 2s + 1}{s + 1}}} = \frac{1}{s + \frac{1}{2s + \frac{1}{s + 1}}}$$

Diese Kettenbruchfunktion kann nun allgemeingültig mit einem Leiternetzwerk realisiert werden:

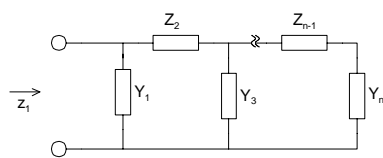


Bild 3-7: Realisation der Kettenbruch-Impedanzfunktion als Leiternetzwerk.

$$z_1 = \frac{1}{Y_1 + \frac{1}{Z_2 + \frac{1}{Y_3 + \dots + \frac{1}{Z_{n-1} + \frac{1}{Y_n}}}}}$$

Hierbei gilt  $Y_i = sC$  und  $Z_i = sL$  ( $i=1..n-1$ ) und für  $Y_n = sC + \frac{1}{R_L}$ . Für das Beispiel werden die

Elementwerte daher:

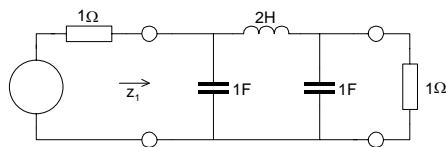


Bild 3-8: Mögliche Schaltung für Beispiel 3-1 mit Elementwerten.

Durch Frequenz- und Impedanztransformation werden die Elemente entsprechend den Filteranforderungen umgerechnet (skaliert).

### Beispiel 3-2: Butterworth Filter 3. Ordnung ohne $R_L$ .

Man bestimme die Elementwerte für ein normierten Butterworth-Tiefpass für  $Z_0=1\Omega$  und  $Z_L \rightarrow \infty$ .

#### Lösung:

Mit der in Beispiel 3-1 gezeigten Übertragungsfunktion  $G(s)$  wird unter Anwendung von (3-11) die Eingangsimpedanz:

$$z_1(s) = \frac{2s^2 + 1}{s^3 + 2s}$$

Mit Kettenbruchentwicklung erhalten wir:

$$z_1(s) = \frac{1}{0.5s + \frac{1}{1.333s + \frac{1}{1.5s}}}$$

Das Vorgehen ist dabei genau gleich wie in Beispiel 3-1. Die zum Kettenbruch gehörige Schaltung ist:

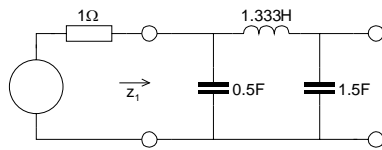


Bild 3-9: Mögliche Schaltung für Beispiel 3-2

### 3.5.3 Frequenz und Impedanztransformation

Filterschaltungen werden in der Regel normiert bezüglich  $\omega_c = 1\text{rad/s}$  und  $Z_0 = 1\Omega$  entworfen. Mit Hilfe der Frequenz- und Impedanztransformation wird das normierte Filter in die gewünschte Frequenzlage und Impedanz umgerechnet.

Bei der Transformation werden ausschliesslich die Ein- und Ausgangsimpedanz, sowie die Frequenzlage verändert. Das Übertragungsverhalten mit Dämpfung, Flankensteilheit, Welligkeit, etc. bleibt unverändert.

Bei der Frequenztransformation werden alle frequenzabhängigen Elemente mit einem konstanten Faktor FSF (Frequency Scaling Factor) multipliziert.

Bei der Impedanztransformation werden alle Impedanzen (inklusive Quellen- und Abschlussimpedanz) mit einem konstanten Faktor Faktoren ISF (Impedance Scaling Factor) multipliziert.

Impedanztransformation

$$ISF = \frac{Z_{0neu}}{Z_{0alt}}$$

$$L' = ISF \cdot L$$

$$C' = \frac{C}{ISF}$$

$$Z' = Z \cdot ISF$$

Frequenztransformation

$$FSF = \frac{f_{alt}}{f_{neu}}$$

$$L' = L \cdot FSF$$

$$C' = C \cdot FSF$$

$$Z' = Z$$

(3-12)

### Beispiel 3-3: Impedanz- und Frequenztransformation

Der normierte Filter-Prototyp nach Bild 3-10 soll für ein Frequenz von 800Hz und Impedanz von  $600\Omega$  umgerechnet werden.

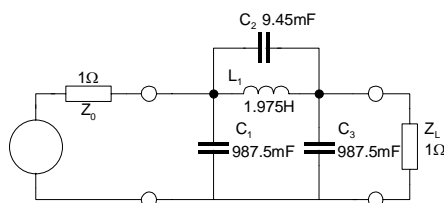


Bild 3-10: Vorgabe für Tiefpass 3. Ordnung zur Frequenz- und Impedanztransformation in Beispiel 3-3.

### Lösung:

Aus (3-12) ist ersichtlich, dass es keine Rolle spielt welche Transformation zuerst erfolgt oder ob beide gleichzeitig erfolgen. Wir führen hier zuerst die Impedanztransformation durch und erhalten die neuen Elementwerte:

**Berechnungen Impedanztransformation:**

$$\begin{aligned} \text{ISF} &:= \frac{Z_{0\text{neu}}}{Z_{0\text{alt}}} & \text{ISF} &= 600 \times 10^0 \\ Z'_L &:= Z_L \cdot \text{ISF} & Z'_L &= 600 \times 10^0 \Omega \\ Z'_0 &:= Z_{0\text{alt}} \cdot \text{ISF} & Z'_0 &= 600 \times 10^0 \Omega \\ C'_1 &:= \frac{C_1}{\text{ISF}} & C'_1 &= 1.646 \times 10^{-3} \text{ F} \\ C'_2 &:= \frac{C_2}{\text{ISF}} & C'_2 &= 15.75 \times 10^{-6} \text{ F} \\ C'_3 &:= \frac{C_3}{\text{ISF}} & C'_3 &= 1.646 \times 10^{-3} \text{ F} \\ L'_1 &:= L_1 \cdot \text{ISF} & L'_1 &= 1.185 \times 10^3 \text{ H} \end{aligned}$$

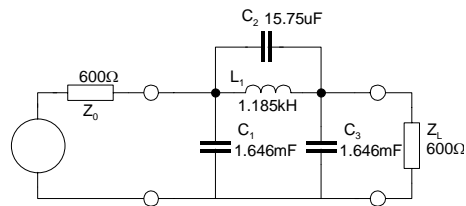


Bild 3-11: Rechnung und Elementwerte nach Impedanztransformation in Beispiel 3-3.

**Berechnungen Frequenztransformation:**

$$\text{FSF} := \frac{f_{\text{alt}}}{f_{\text{neu}}} \quad \text{FSF} = 198.944 \times 10^{-6}$$

Die anschliessende Frequenztransformation ergibt die Werte:

**Berechnungen Frequenztransformation:**

$$\begin{aligned} \text{FSF} &:= \frac{f_{\text{alt}}}{f_{\text{neu}}} & \text{FSF} &= 198.944 \times 10^{-6} \\ C''_1 &:= C'_1 \cdot \text{FSF} & C''_1 &= 327.428 \times 10^{-9} \text{ F} \\ C''_2 &:= C'_2 \cdot \text{FSF} & C''_2 &= 3.133 \times 10^{-9} \text{ F} \\ C''_3 &:= C'_3 \cdot \text{FSF} & C''_3 &= 327.428 \times 10^{-9} \text{ F} \\ L''_1 &:= L'_1 \cdot \text{FSF} & L''_1 &= 235.748 \times 10^{-3} \text{ H} \end{aligned}$$

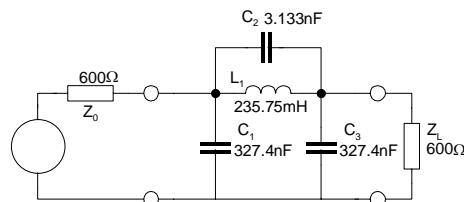


Bild 3-12: Rechnung und Elementwerte nach Impedanz- und Frequenztransformation in Beispiel 3-3.

**Beispiel 3-4: Frequenz- und Impedanztransformation 2**

Nachfolgende Schaltung ist für eine Grenzfrequenz von 1MHz dimensioniert worden. Sie soll nun für eine Grenzfrequenz von 2MHz und eine Quellenimpedanz von 50Ω umdimensioniert werden.

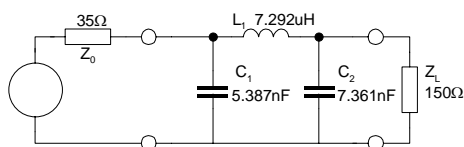


Bild 3-13: Vorgabe für Tiefpass 3. Ordnung zur Frequenz- und Impedanztransformation in Beispiel 3-4.

**Lösung:**

Mit einer zusammengefassten Impedanz- und Frequenztransformation werden die neuen Elementwerte:

**Vorgaben:**

$f_{\text{alt}} := 1\text{MHz}$        $f_{\text{neu}} := 2\text{MHz}$   
 $Z_{0\text{alt}} := 35\Omega$        $Z_{0\text{neu}} := 50\Omega$        $Z_L := 150\Omega$   
 $C_1 := 5.387\text{nF}$        $C_2 := 7.361\text{nF}$        $L_1 := 7.294\mu\text{H}$

**Berechnungen Frequenz- und Impedanztransformation:**

$ISF := \frac{Z_{0\text{neu}}}{Z_{0\text{alt}}}$        $ISF = 1.429 \times 10^0$   
 $FSF := \frac{f_{\text{alt}}}{f_{\text{neu}}}$        $FSF = 500 \times 10^{-3}$   
 $Z'_L := Z_L \cdot ISF$        $Z'_L = 214.286 \times 10^0 \Omega$   
 $Z'_0 := Z_{0\text{alt}} \cdot ISF$        $Z'_0 = 50 \times 10^0 \Omega$   
 $C'_1 := \frac{C_1}{ISF \cdot FSF}$        $C'_1 = 1.885 \times 10^{-9} \text{F}$   
 $C'_2 := \frac{C_2}{ISF \cdot FSF}$        $C'_2 = 2.576 \times 10^{-9} \text{F}$   
 $L'_1 := L_1 \cdot ISF \cdot FSF$        $L'_1 = 5.209 \times 10^{-6} \text{H}$

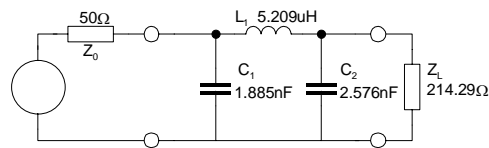


Bild 3-14: Rechnung und Elementwerte nach kombinierter Impedanz- und Frequenztransformation in Beispiel 3-4.

### 3.6 Netzwerk Transformationen

Sie dienen dazu, schlecht realisierbare Struktur so zu umzuformen, dass sie besser realisiert werden können ohne die Übertragungseigenschaften zu verändern. Eine andere Anwendung sind Impedanzanpassungen an eine Last oder Quelle. Man unterscheidet zwei Gruppen von Netzwerktransformationen:

#### Breitband-Transformationen

Alle Übertragungseigenschaften bleiben im gesamten Frequenzbereich vollständig erhalten.

#### Schmalband-Transformationen

Die Transformation erfolgt nur für eine bestimmte Frequenz exakt und ist daher nur in einem beschränkten Frequenzbereich brauchbar.

#### 3.6.1 Norton Transformationen

Mit Norton-Transformationen können Netzwerke in übertragungsmässig identische, aber besser realisierbare Strukturen umgeformt werden. Die Schaltung wird oft aufwändiger. Lastimpedanzanpassung und Änderung der Elementwerte erfolgen breitbandig.

Schlechte Realisierbarkeit ergibt vor allem dann, wenn sehr grosse Induktivitäts- Kapazitätsverhältnisse auftreten. Dies ist vor allem der Synthese und Bandpässen und Bandsperren der Fall. Betrachten wir hierzu das Beispiel eines Bandpass 3. Ordnung mit 10MHz Mittenfrequenz und 100kHz Bandbreite:

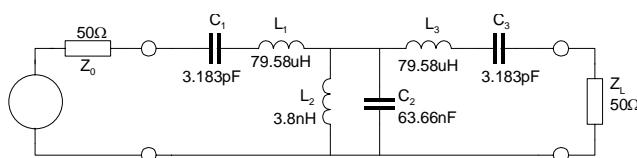


Bild 3-15: Beispiel für ein schlecht realisierbares Netzwerk. Mit Hilfe von Norton-Transformationen kann es in äquivalentes Netzwerk mit günstigeren Elementwerten umgeformt werden.

Man erkennt sofort die ungünstigen Werte für  $L_2$  und  $C_2$ , wie auch die kleinen Werte für die Kapazitäten  $C_1$  und  $C_3$ . Mit Hilfe geeigneter Transformation kann man die Schaltung so umformen, dass man besser realisierbare Elementwerte erhält.

### 3.6.2 Grundlagen der Norton Transformation

(Original: F. Dellsperger)

Die Norton-Transformationen wurden erstmals von E.L. Norton beschrieben. Dazu wird die Idee verfolgt:

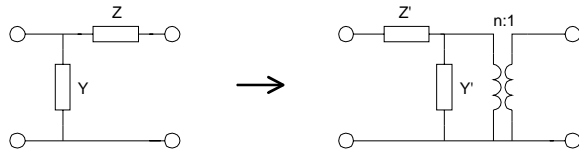


Bild 3-16:Prinzip der Norton-Transformation.

Wir beschreiben beide Netzwerke mit den A-Parametern und setzen die resultierenden Parameter gleich:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & Z' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y' & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & 1/n \end{bmatrix} \quad (3-13)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & Z \\ Y & 1 + ZY \end{bmatrix} \quad = \begin{bmatrix} n(1 + Y'Z') & Z'/n \\ nY' & 1/n \end{bmatrix}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} A_{12} = A'_{12} &\rightarrow Z = Z'/n &\rightarrow Z' = nZ \\ A_{21} = A'_{21} &\rightarrow Y = nY' &\rightarrow Y' = Y/n \\ A_{22} = A'_{22} &\rightarrow 1 + ZY = 1/n &\rightarrow n = \frac{1}{1 + ZY} \end{aligned} \quad (3-14)$$

$$Z' = nZ$$

$$Y' = Y/n \quad (3-15)$$

$$n = \frac{1}{1 + ZY}$$

### Norton Transformation allgemein

### 3.6.3 Transformation für Netzwerk mit Kapazitäten

Besteht das Originalnetzwerk aus Kapazitäten erhalten wir:

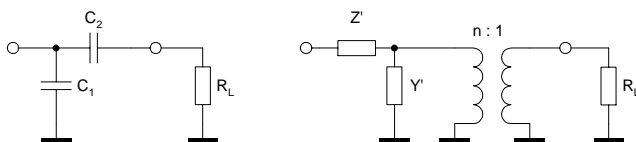


Bild 3-17: Norton-Transformation an Netzwerk mit Kapazitäten.

$$Y = sC_1 \quad Z = \frac{1}{sC_2}$$

$$n = \frac{1}{1 + sC_1 \frac{1}{sC_2}} = \frac{1}{1 + \frac{C_1}{C_2}} = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$$

$$Z' = nZ = n \frac{1}{sC_2} = \frac{1}{s(C_1 + C_2)} \quad (3-16)$$

$$Y' = \frac{Y}{n} = \frac{sC_1}{n} = \frac{sC_1(C_1 + C_2)}{C_2}$$

Damit wird das transformierte Netzwerk:

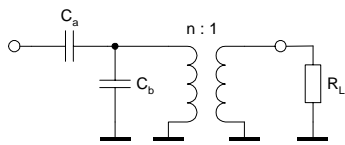


Bild 3-18: Transformiertes Netzwerk aus Bild 3-20.

Mit

$$n = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \quad C_a = \frac{C_2}{n} \quad C_b = \frac{C_1}{n} \quad (3-17)$$

Der ideale Transformator kann eliminiert werden, wenn alle Impedanzen auf der Sekundärseite mit  $n^2$  multipliziert werden.

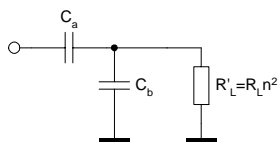


Bild 3-19: Netzwerk aus Bild 3-18 nach Elimination des Transformators.

### Beispiel 3-5: Norton-Transformation an einem Bandpass

Umformung an einem Tschebyscheff-Bandpass nach Bild 3-20 mit den Daten:

$$n = 3$$

$$f_{c1} = 200\text{MHz} \quad f_{c2} = 250\text{MHz}$$

$$Z_0 = 50\Omega$$

$$A_r = 0.1\text{dB}$$

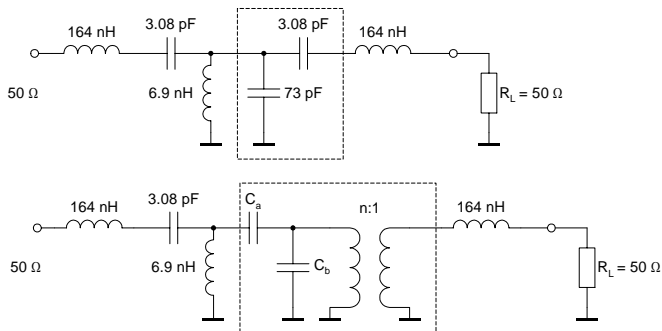


Bild 3-20: Bandpass für Norton-Transformation in Beispiel 3-5.

$$n := \frac{C_2}{C_1 + C_2}$$

$$n = 0.04$$

$$C_a := \frac{C_2}{n}$$

$$C_a = 76.08 \cdot \text{pF}$$

$$C_b := \frac{C_1}{n}$$

$$C_b = 1.803 \cdot 10^3 \cdot \text{pF}$$

Elimination des Transformators:

$$L' = n^2 L = 0.2688 \text{ nH}$$

$$R'_L = n^2 R_L = 0.082 \text{ } \Omega$$

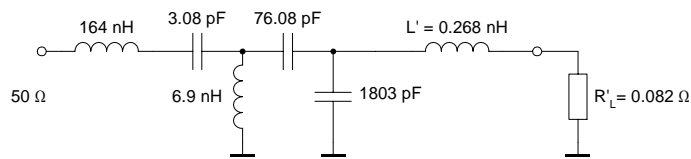


Bild 3-21: Resultat der Norton-Transformation nach Elimination des Transformators.

Wenn die Transformationsgleichungen untersucht werden, kann festgestellt werden, dass alle Elemente des gleichen Typs sein müssen:

$$n = \frac{1}{1 + ZY}$$

$n$  muss frequenzunabhängig sein, also muss  $s$  in  $ZY$  kürzbar sein. Da die transformierten Elemente mit  $n$  verknüpft sind, müssen beide Netzwerke, das Original und das transformierte, den gleichen Elementtyp aufweisen.

Die Transformation kann zur Impedanzanpassung auch aufgeteilt werden, wenn spezielle Übertragungsverhältnisse  $n$  gewünscht werden. Die Grenzen von  $n$  sind gegeben durch:

$$\frac{1}{1 + ZY} \leq n \leq 1$$

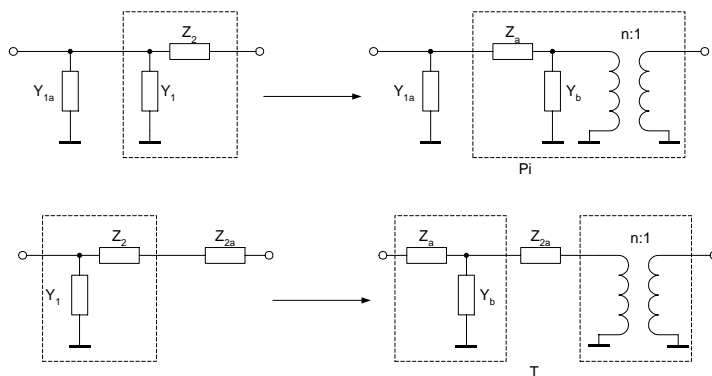


Bild 3-22: Ansatz für Transformation zur Impedanzanpassung.

Bei gegebenen  $n$ ,  $C_1$  und  $C_2$  erhält man:

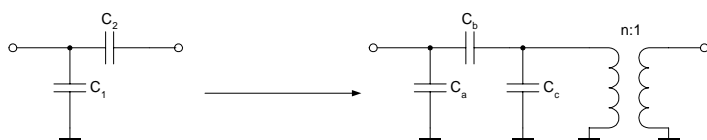


Bild 3-23: Konkrete Schaltung zur Impedanzanpassung.

$$C = C_2 \frac{1-n}{n} \quad C_a = C_1 - C \quad C_b = \frac{C_2}{n} \quad C_c = \frac{C}{n}$$

**Beispiel 3-6:** Norton Transformation zur Impedanzanpassung

Die Schaltung aus Beispiel 3-5 soll so transformiert werden, dass  $R'_L = 5 \Omega$  wird.

$$C_1 := 73 \cdot \text{pF} \quad C_2 := 3.08 \cdot \text{pF} \quad R_{Lt} := 5 \cdot \Omega \quad R_L := 50 \cdot \Omega \quad L := 0.164 \cdot \mu\text{H}$$

$$n := \sqrt{\frac{R_{Lt}}{R_L}} \quad n = 0.316$$

$$C := C_2 \cdot \frac{1-n}{n} \quad C_2 = 3.08 \cdot \text{pF}$$

$$C_a := C_1 - C \quad C_a = 66.34 \cdot \text{pF}$$

$$C_b := \frac{C_2}{n} \quad C_b = 9.74 \cdot \text{pF}$$

$$C_c := \frac{C}{n} \quad C_c = 21.06 \cdot \text{pF}$$

$$L_t := n^2 \cdot L \quad L_t = 0.016 \cdot \mu\text{H}$$

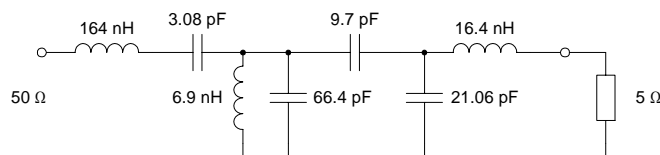
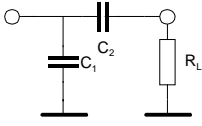
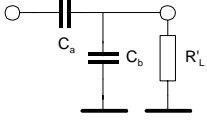
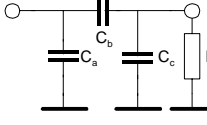
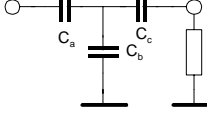
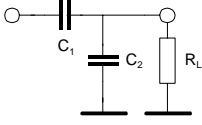
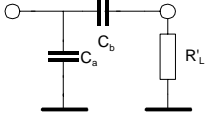
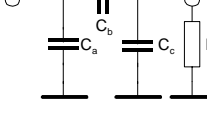
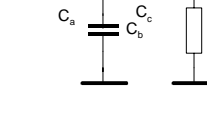


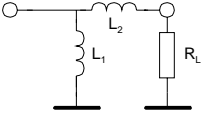
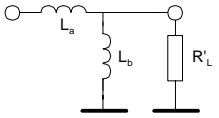
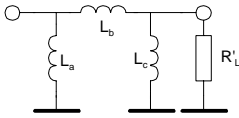
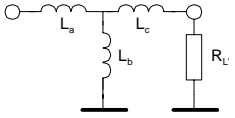
Bild 3-24: Umformung zur Anpassung an eine Lastimpedanz von  $R'_L = 5 \Omega$ .

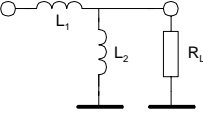
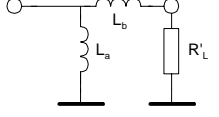
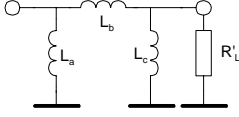
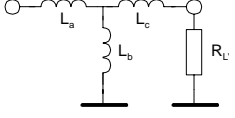
Auf die gleiche Art und Weise können die anderen möglichen Transformationstopologien ebenfalls hergeleitet werden.



### 3.6.4 Zusammenstellung der Norton-Transformationen

Original Netzwerk	Transformiertes Netzwerk	Transformationsgleichungen
		$\left(\frac{C_2}{C_1 + C_2}\right)^2 R_L \leq R'_L \leq R_L \quad R'_L = n^2 R_L$
		$n = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$ $C_a = \frac{C_2}{n} \quad C_b = \frac{C_1}{n}$
		$C = C_2 \frac{1-n}{n} \quad C_a = C_1 - C$ $C_b = \frac{C_2}{n} \quad C_c = \frac{C}{n}$
		$C = C_1 \frac{n}{1-n} \quad C_a = \frac{C}{n}$ $C_b = \frac{C_1}{n} \quad C_c = \frac{C C_2}{n^2 (C - C_2)}$
		$R_L \leq R'_L \leq \left(\frac{C_1 + C_2}{C_1}\right)^2 R_L \quad R'_L = n^2 R_L$
		$n = \frac{C_1 + C_2}{C_1}$ $C_a = \frac{C_2}{n} \quad C_b = \frac{C_1}{n}$
		$C = (n-1)C_1 \quad C_a = \frac{C}{n}$ $C_b = \frac{C_1}{n} \quad C_c = \frac{C_2 - C}{n^2}$
		$C = \frac{C_2}{n-1} \quad C_a = \frac{C C_1}{C - C_1}$ $C_b = \frac{C_2}{n} \quad C_c = \frac{C}{n}$

Original Netzwerk	Transformiertes Netzwerk	Transformationsgleichungen
		$\left(\frac{L_2}{L_1 + L_2}\right)^2 R_L \leq R'_L \leq R_L \quad R'_L = n^2 R_L$
		$n = \frac{L_1}{L_1 + L_2}$ $L_a = nL_2 \quad L_b = nL_1$
		$L = L_2 \frac{n}{1 - n} \quad L_a = \frac{L L_1}{L - L_1}$ $L_b = nL_2 \quad L_c = nL$
		$L = L_1 \frac{1 - n}{n} \quad L_a = nL$ $L_b = nL_1 \quad L_c = n^2 (L_2 - L)$

		$R_L \leq R'_L \leq \left(\frac{L_1 + L_2}{L_2}\right)^2 R_L \quad R'_L = n^2 R_L$
		$n = \frac{L_1 + L_2}{L_2}$ $L_a = nL_2 \quad L_b = nL_1$
		$L = \frac{L_1}{n - 1} \quad L_a = nL$ $L_b = nL_1 \quad L_c = \frac{n^2 L L_2}{L - L_2}$
		$L = (n - 1)L_2 \quad L_a = L_1 - L$ $L_b = nL_2 \quad L_c = nL$

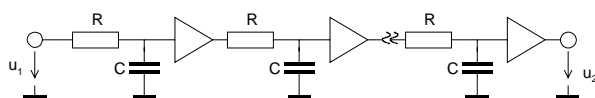
### 3.7 Approximation der Übertragungsfunktion

Die Übertragungsfunktion definiert den Amplituden- und Phasenverlauf und daher das gesamte Übertragungsverhalten des Filters. Wir beschränken uns auf die in Zusammenstellung in Kap.3.3 gezeigten Verläufe, wobei kritische Dämpfung, Butterworth und Tschebyscheff immer schwerpunktmässig behandelt werden.

Die schaltungstechnische Realisation aktiver Filter wird in späteren Kapiteln behandelt.

#### 3.7.1 Tiefpass mit kritischer Dämpfung

Sie verkörpern das Übertragungsverhalten rückwirkungsfrei kaskadierter RC-Glieder erster Ordnung. Die erreichbare Flachheit im Durchlassbereich in Verbindung mit der Flankensteilheit ist bescheiden.



**Bild 3-25:**  
Filter mit kritischer Dämpfung als Tiefpassfilter n-ter Ordnung. Alle Zeitkonstanten RC sind gleich gross

Die Übertragungseigenschaften ergeben sich aus der Gleichung für den Tiefpass n-ter Ordnung:

$$G(s) = \frac{1}{(1 + s\tau)^n} \quad n: \text{Filterordnung} \quad (3-18)$$

$$\tau: RC$$

$$F(\Omega) = \frac{1}{(1 + \Omega^2)^{\frac{n}{2}}} \quad \Omega = \frac{f}{f_c} = \tau \cdot \omega \quad (3-19)$$

$$\varphi(\Omega) = -n \cdot \text{atan}(\Omega) \quad (3-20)$$

$$h(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i}{i! \cdot \tau^i} \quad \text{Tiefpass mit krit. Dämpfung} \quad (3-21)$$

Eine Begründung dieser Formeln erübrigt sich. Hierzu wird auf die Grundlagen der Elektrotechnik verwiesen.

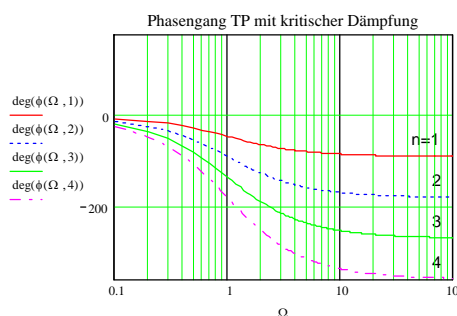
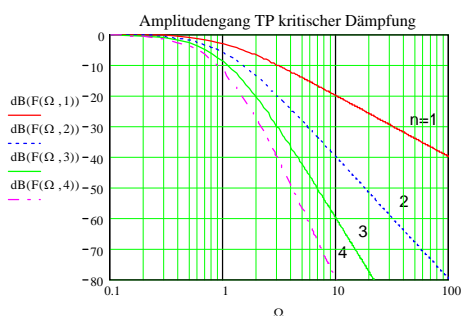
Der Amplituden- und Phasengang wird für verschiedene Filterordnungen:

Formal:  $F(\Omega, n) := \frac{1}{(1 + \Omega^2)^{\frac{n}{2}}}$  Amplitudengang normierter Tiefpass mit kritischer Dämpfung der Ordnung n.

$\phi(\Omega, n) := -n \cdot \text{atan}(\Omega)$  Phasengang TP mit kritischer Dämpfung der Ordnung n.

$\Omega := 0.1, 0.2, \dots, 100$   $\text{dB}(x) := 20 \cdot \log(x)$

$\text{deg}(\phi) := \frac{\phi \cdot 180}{\pi}$



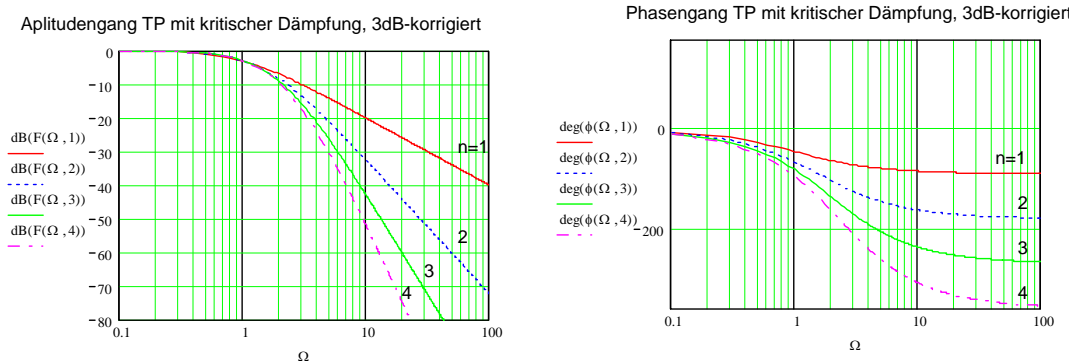
**Bild 3-26:**  
Amplituden- und Phasengang beim Tiefpass mit kritischer Dämpfung der Ordnungen 1..4

Man erkennt in Bild 3-26, dass bei  $\Omega=1$  eine Dämpfung von  $n \cdot 3\text{dB}$  herrscht. Soll ein Filter mit kritischer Dämpfung  $n$ -ter Ordnung bei  $\Omega=1$  eine Dämpfung von  $3\text{dB}$  aufweisen ist die Grenzfrequenz entsprechend zu korrigieren.

Dazu betrachtet man die Frequenz, wo ein Tiefpass der Ordnung  $n$  mit kritischer Dämpfung den Wert  $-n \cdot 3.01\text{dB}$  erreicht:

$$\begin{aligned}
 -3.01\text{dB} &= \frac{1}{\left(\sqrt{1+\Omega^2}\right)^n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 \frac{1}{\sqrt{2}} &= \frac{1}{\sqrt{(1+\Omega^2)^n}} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{(1+\Omega^2)^n} \\
 (1+\Omega^2)^n &= 2 \quad \rightarrow \quad 2^{\frac{1}{n}} - 1 = \Omega^2 \quad \underline{\underline{\Omega = \sqrt{2^{\frac{1}{n}} - 1} = k}} \quad (3-22)
 \end{aligned}$$

Für ein (Tiefpass-) Filter mit kritischer Dämpfung der Ordnung  $n$  muss die Grenzfrequenz mit diesem Faktor  $k$  multipliziert werden.



**Bild 3-27:**  
3.01-dB dämpfungskorrigierter Verlauf beim Tiefpass mit kritischer Dämpfung der Ordnungen 1..4

Alle Graphen schneiden sich nun im  $-3.01\text{dB}$ -Punkt. Nun lässt sich auch die minimal erforderliche Filterordnung  $n$  bestimmen. Wird bei einer Sperrfrequenz  $f_H$  eine minimale Sperrdämpfung  $A_H$  gefordert, wird die minimal benötigte Filterordnung bezüglich der normierten Sperrfrequenz  $\Omega_H$ :

$$\begin{aligned}
 A_H &\leq \frac{1}{\left(\sqrt{1+k^2\Omega_H^2}\right)^n} = \frac{1}{\sqrt{(1+k^2\Omega_H^2)^n}} \\
 A_H^2 &\leq (1+k^2\Omega_H^2)^{-n} \quad \rightarrow \quad 2 \ln A_H \leq -n \ln(1+k^2\Omega_H^2) \\
 n &\geq \frac{-2 \ln A_H}{\ln(1+k^2\Omega_H^2)} = \frac{-2 \ln A_H}{\ln\left(1 + \left(2^{\frac{1}{n}} - 1\right)\Omega_H^2\right)} \quad \left(\Omega_H = \frac{f_H}{f_c}\right) \quad (3-23)
 \end{aligned}$$

Da  $k$  selbst von  $n$  abhängig ist kann keine explizite Lösung formuliert werden. Eine numerische Lösung ist aber problemlos möglich. In vielen Fällen dürfte auch eine Abschätzung aus dem Graphen genügend sein.

**Beispiel 3-7:**(Min. notwendige Filterordnung)

Welche Filterordnung für ein TP mit kritischer Dämpfung mit 1kHz Grenzfrequenz ist minimal notwendig, wenn bei 10kHz eine Sperrdämpfung von 40dB erreicht werden soll?

**Lösung:**

**Vorgaben:**

- $f_C := 1 \cdot 10^3$  [Hz] (-3dB Grenzfrequenz)
- $f_H := 10 \cdot 10^3$  [Hz] (Sperrfrequenz)
- $A_{HdB} := 40$  [dB] (geforderte Sperrdämpfung)

**Berechnungen:**

$$A_H := 10^{-0.05 \cdot A_{HdB}} \quad A_H = 0.01$$

$$\Omega_H := \frac{f_H}{f_C}$$

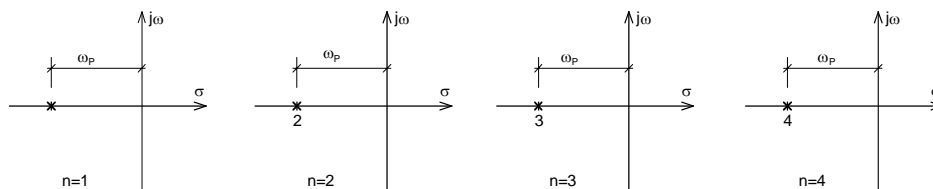
$n := 1$                       Schätzwert fuer numerische MathCad Lösung

Vorgabe

$$n = \frac{-2 \ln(A_H)}{\ln \left[ 1 + \left( \frac{1}{2^n - 1} \right) \Omega_H^2 \right]}$$

$n := \text{suchen}(n)$              $n = 2.701$                        $\text{ceil}(n) = 3$             min. notwendige Filterordnung

Charakteristisch für das Filter mit kritischer Dämpfung ist, dass die Übertragungsfunktion  $G(s)$  nur Pole auf der reellen Achse aufweist, und zwar ein  $n$ -facher Pol für einen Tiefpass der Ordnung  $n$ :



**Bild 3-28:**

Filter mit kritischer Dämpfung haben Pole ausschliesslich auf der reellen Achse.

Die Sprungantwort von Filtern mit kritischer Dämpfung zeigen keine Überschwinger. Durch Laplace-Rücktransformation findet man die allgemeine Formel für die Sprungantwort eines Tiefpass kritischer Dämpfung  $n$ -ter Ordnung:

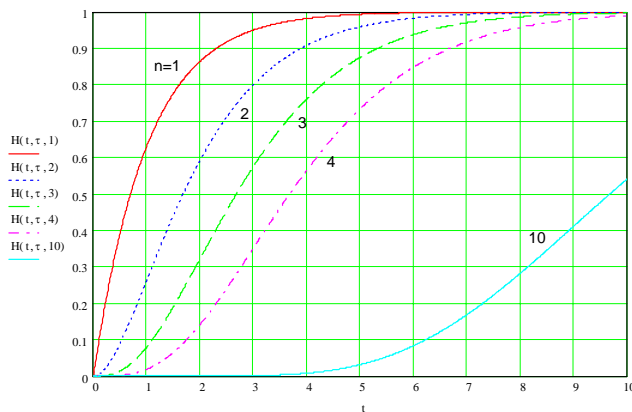
$$h(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i}{i! \cdot \tau^i} \quad (3-24)$$

Die grafische Darstellung der Sprungantwort normierter Tiefpassfilter mit kritischer Dämpfung wird:

$$H(t, \tau, n) := 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i}{i! \cdot \tau^i} \quad \text{Sprungantwort TP mit kritischer Dämpfung der Ordnung } n.$$

$$t := 0, 0.01, \dots, 10 \quad \tau := 1$$

Sprungantworten normierter Filter mit kritischer Dämpfung der Ordnung 1..4 und 10:



**Bild 3-29:** Normierte Sprungantworten von Tiefpässen mit kritischer Dämpfung der Ordnung  $n=1..4$  und  $n=10$ .

**Beispiel 3-8:** (Filter mit kritischer Dämpfung 4. Ordnung)

Man bestimme die Filterkoeffizienten der quadratischen Teilfilter für kritische Dämpfung 4. Ordnung bei einer  $-3\text{dB}$ -Grenzfrequenz von  $2\text{kHz}$ . Der resultierende Amplitudengang ist als Graph darzustellen.

**Lösung:**

**Vorgaben:**

$$f_C := 2 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

$$n := 4 \quad \text{ORIGIN} := 1$$

$$G(s, b_1, b_2) := \frac{1}{\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} (1 + b_{1_i} \cdot s + b_{2_i} s^2)} \quad \text{Übertragungsfunktion Tiefpassfilter mit quadratischen Gliedern}$$

**Berechnungen:**

$$i := 1..n$$

normierte Pollagen

$$a_i := \sqrt{\frac{1}{2^n} - 1}$$

$$a = \begin{pmatrix} 0.435 \\ 0.435 \\ 0.435 \\ 0.435 \end{pmatrix}$$

$$s_p := -a$$

$$s_p = \begin{pmatrix} -0.435 \\ -0.435 \\ -0.435 \\ -0.435 \end{pmatrix}$$

Quadr. Glieder:

$$j := 1.. \frac{n}{2} \quad (\text{n muss gerade sein!})$$

$$b_{1_j} := 2a_{2j-1}$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0.87 \\ 0.87 \end{pmatrix}$$

$$b_{2_j} := 2^n - 1$$

$$b_2 = \begin{pmatrix} 0.189 \\ 0.189 \end{pmatrix}$$

Koeffizienten auf Grenzfrequenz skalieren:

$$\omega_C := 2\pi \cdot f_C$$

$$b_1 := \frac{b_1}{\omega_C}$$

$$b_2 := \frac{b_2}{\omega_C^2}$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 6.923 \times 10^{-5} \\ 6.923 \times 10^{-5} \end{pmatrix} \text{ s}$$

$$b_2 = \begin{pmatrix} 1.198 \times 10^{-9} \\ 1.198 \times 10^{-9} \end{pmatrix} \text{ s}^2$$

Kontrolle  $-3\text{dB}$  Punkt:

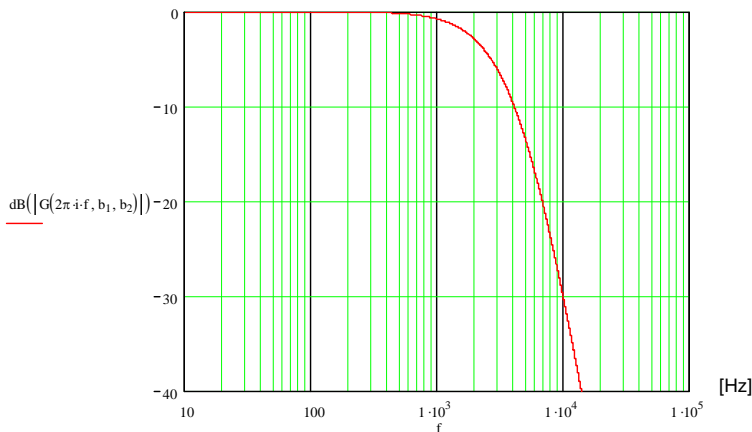
$$\text{dB}(x) := 20 \cdot \log(x)$$

$$\text{dB}(|G(2\pi \cdot i \cdot f_C, b_1, b_2)|) = -3.01$$

**Grafische Darstellung:**

$$f := 10, 15..100000$$

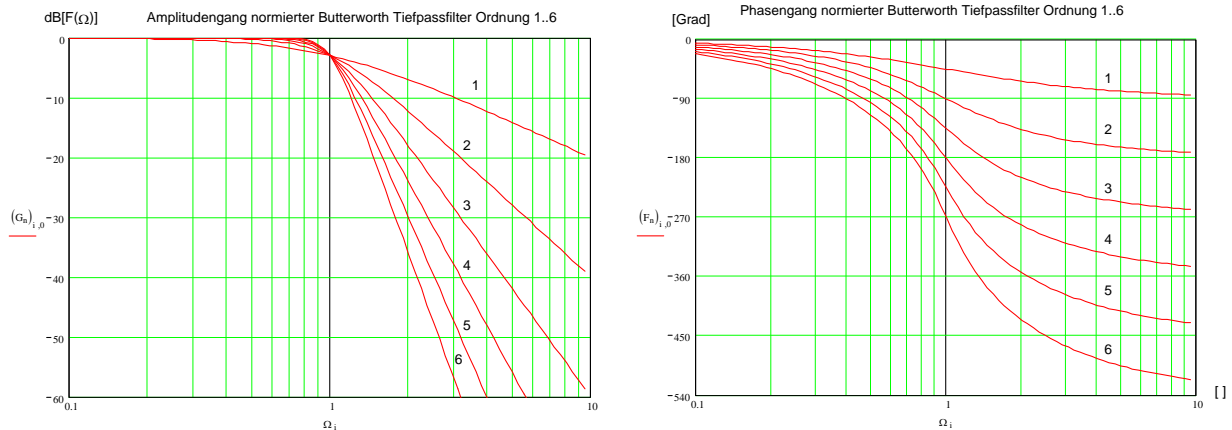
AdB



**Bild 3-30:** Tiefpass 4. Ordnung mit kritischer Dämpfung nach Beispiel 3-8.

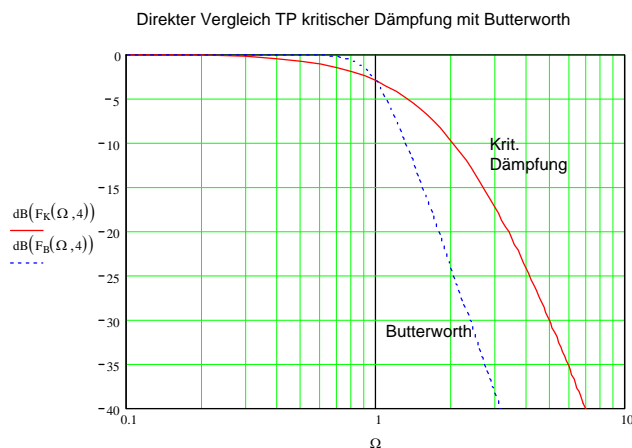
### 3.7.2 Butterworth Tiefpässe (Potenz-Filter)

Sie verlaufen maximal flach bis zur Grenzfrequenz um dann mit  $-n \cdot 20\text{dB/Dek}$  asymptotisch abzufallen.



**Bild 3-31:** Amplituden- und Phasengang bei Butterworth-Tiefpassfilter verschiedener Ordnung.

Butterworth-Filter haben im Durchlassbereich wesentlich bessere Dämpfungseigenschaften als Filter mit kritischer Dämpfung:



**Bild 3-32:** Vergleich Amplitudengang Butterworth mit kritischer Dämpfung bei einem Filter 4. Ordnung. Man erkennt den wesentlich flacheren Verlauf im Durchlassbereich beim Butterworth Filter.

Der Amplitudengang, Pollage und minimale Filterordnung des Butterworth-Tiefpass lauten:

$$|F(\Omega)| = \frac{A_0}{\sqrt{1 + \Omega^{2n}}} \quad (3-25)$$

$$S_p = -\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) + j \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \quad k = 1 \dots n \quad \text{Butterworth Tiefpass} \quad (3-26)$$

$$n \geq \frac{\ln(10^{0.1 \cdot A_{HdB}} - 1)}{2 \ln(\Omega_H)} \quad \Omega_H = \frac{f_H}{f_C} \quad A_{HdB} = \text{Sperrdämpfung (pos. Wert)} \quad (3-27)$$

Die Pole  $S_p$  liegen auf dem linken Einheitskreis. Ein TP-Filter gerader Ordnung  $n$  hat daher  $n/2$  konjugiert komplexe Polpaare. Ein Filter ungerader Ordnung hat einen reellen Pol und  $(n-1)/2$  konjugiert komplexe Polpaare. Die kreisförmige Polanordnung ist für das Butterworth-Filter charakteristisch.



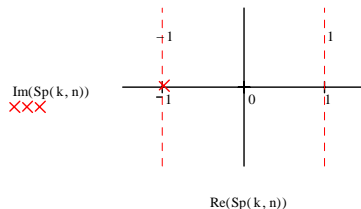
**Normierte Pole von Butterworth-Tiefpässen der Ordnung 1..5:**

$j := \sqrt{-1}$        $Sp(k,n) := -\sin\left(\frac{1+2 \cdot k}{2 \cdot n} \pi\right) + j \cdot \cos\left(\frac{1+2 \cdot k}{2 \cdot n} \pi\right)$       Normierte Pollagen von Butterw  
Tiefpässen der Ordnung n.

$n := 1$        $k := 0..n - 1$

$Sp(k,n) =$

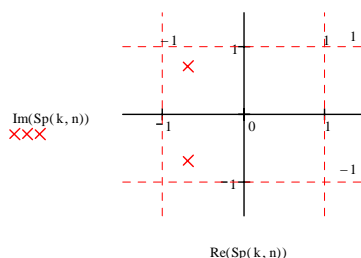
-1
----



$n := 2$        $k := 0..n - 1$

$Sp(k,n) =$

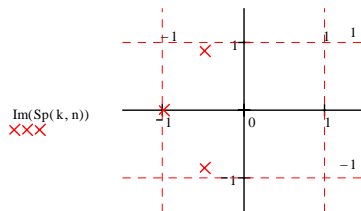
-0.707+0.707j
-0.707-0.707j



$n := 3$        $k := 0..n - 1$

$Sp(k,n) =$

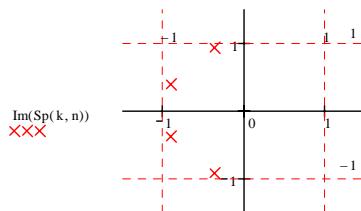
-0.5+0.866j
-0.5-0.866j



$n := 4$        $k := 0..n - 1$

$Sp(k,n) =$

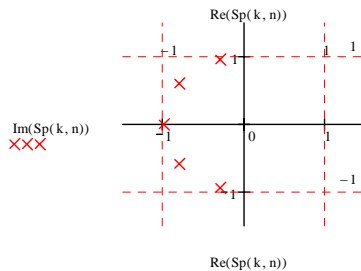
-0.383+0.92j
-0.924+0.383j
-0.924-0.383j
-0.383-0.92j



$n := 5$        $k := 0..n - 1$

$Sp(k,n) =$

-0.309+0.95j
-0.809+0.58j
-0.809-0.58j
-0.309-0.95j



**Bild 3-33:**  
Polfrequenzen und grafische Darstellung der  
Pollage in der komplexen Zahlenebene beim  
normierten Butterworth-Tiefpass.

Die Polfrequenz ist per Definition der Betrag der Pollage.

$\Omega_{Pi} = |S_{Pi}|$        $i = 1..n/2$       **Polgüte**      (3-28)

$Q_{Pi} = \frac{-\Omega_{Pi}}{2 \text{Re}(S_{Pi})}$        $i = 1..n/2$       **Polfrequenz**      (3-29)

Die Polfrequenz  $\Omega_p$  des normierten Butterworth-TP ist daher immer 1.

### 3.7.2.1 Elementwerte Butterworth-Tiefpass

Die Elementwerte für den passiven Butterworth-Tiefpass lassen sich sehr einfach berechnen. Aus der allgemeinen Übertragungsfunktion können nach Kap.3.5.2 Dimensionierungsgleichungen hergeleitet werden. Für die detaillierte Herleitung sei auf die zahlreiche Literatur verwiesen, z.B. [TAI88] und [ELL94].

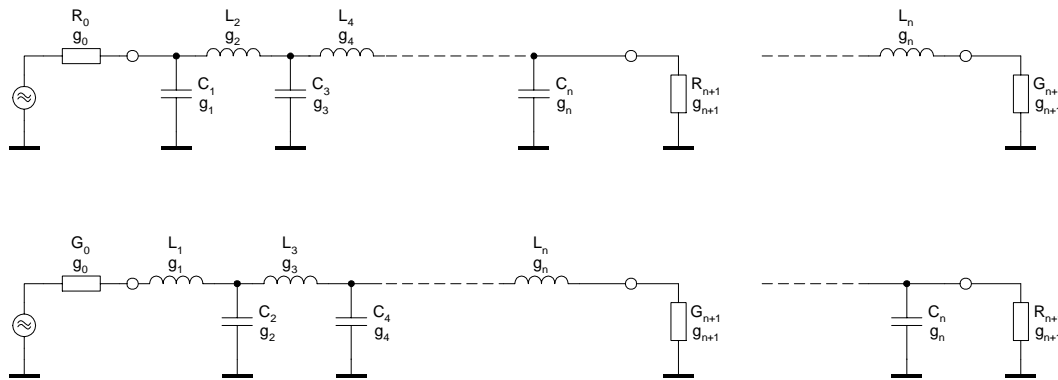
Die normierten Elementwerte lauten: (Normierung:  $\omega=1$ ,  $G'=1$ ,  $R'=1$ )

$$g_0 = 1$$

$$g_k = 2 \sin \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2n} \right] \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$g_{n+1} = 1$$

**Elementwerte  
Butterworth** (3-30)



**Bild 3-34:** Gleichungen für Elementwerte Butterworth- Tiefpassfilter und duale Strukturen für Realisation passiver Filter.

Die entnormierten Elementwerte werden demnach:

$$R_k = g_k \left( \frac{R_0}{R'} \right) = g_k R_0$$

$$G_k = g_k \left( \frac{G_0}{G'} \right) = g_k G_0$$

$$L_k = g_k \left( \frac{R_0}{R'} \right) \left( \frac{\omega'}{\omega_c} \right) = g_k R_0 \frac{1}{\omega_c}$$

$$C_k = g_k \left( \frac{R'}{R_0} \right) \left( \frac{\omega'}{\omega_c} \right) = g_k \frac{1}{R_0 \omega_c}$$

**Entnormierte  
Elementwerte** (3-31)

#### Beispiel 3-9: Passiver Butterworth-Tiefpass

Man realisiere ein Butterworth-Tiefpass 3. Ordnung für eine Grenzfrequenz von 50MHz und eine Impedanz  $Z_0=Z_L=50\Omega$ . Die Eingangsimpedanz soll für hohe Frequenzen ansteigend sein.

#### Lösung:

Da die Charakteristik und Ordnung bereits vorgeben sind, können mit (3-30), (3-31) direkt normierte Elementwerte bestimmt werden. Die Struktur ergibt sich aus der Randbedingung, dass  $z_i$  für hohe Frequenzen ansteigt. Daher wird das erste Element eine Induktivität.

Die Rechnung wird mit MathCad:

**Vorgaben:**

$$Z_0 := 50\Omega \quad n := 3$$

$$f_c := 50\text{MHz}$$

**Berechnungen:**

Normierte Elementwerte:

$$k := 1..n \quad \text{Indizes der normierten Elemente}$$

$$g_0 := 1$$

$$g_k := 2 \sin \left[ \frac{(2k-1) \cdot \pi}{2n} \right]$$

$$g_{n+1} := 1$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Normierte Elementwerte}$$

Entnormierte Elementwerte:

$$R' := 1 \quad G' := 1 \quad \omega' := 1 \quad \omega_c := 2\pi f_c$$

**Elementwerte für erstes Element in Serie:**

<p><b>R</b></p> $i := 0, n + 1..n + 1$ $R_i := g_i \cdot \left( \frac{Z_0}{R'} \right)$ $R = \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix} \Omega$ <p>Abschluss-Widerstände</p>	<p><b>L</b></p> $s := 1, 3..n$ $L_s := g_s \left( \frac{Z_0}{R'} \right) \cdot \left( \frac{\omega'}{\omega_c} \right)$ $L = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.592 \times 10^{-7} \\ 0 \\ 1.592 \times 10^{-7} \end{pmatrix} \text{H}$ <p>Serie-Elemente</p>	<p><b>C</b></p> $p := 2, 4..n$ $C_p := g_p \left( \frac{R'}{Z_0} \right) \cdot \left( \frac{\omega'}{\omega_c} \right)$ $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.273 \times 10^{-10} \end{pmatrix} \text{F}$ <p>Parallel-Elemente</p>
---	---	---

### 3.7.2.2 Begründung der Butterworth-Approximation

Die Forderung nach maximal flachem Durchlass und möglichst steilem Abfall ohne Welligkeit im Sperrbereich mit einer Übertragungsfunktion der Art:

$$G(S) = \frac{1}{1 + a_1 S + a_2 S^2 + \dots + a_n S^n} \quad (3-32)$$

Der normierte Amplitudengang folgt daraus:

$$|F(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{\underbrace{(1 - a_2 \Omega^2 + a_4 \Omega^4 + \dots)^2}_{\text{Re}} + \underbrace{(a_1 \Omega - a_3 \Omega^3 + a_5 \Omega^5 + \dots)^2}_{\text{Im}}}} \quad (3-33)$$

Fasst man die Koeffizienten für die gleichen Potenzen zusammen und nennt die so neu entstandenen Koeffizienten  $A_i$ , erhält man den Amplitudengang:

$$|F(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + A_2 \Omega^2 + A_4 \Omega^4 + \dots + A_{2n} \Omega^{2n}}} \quad (3-34)$$

Der Amplitudengang wird maximal flach, wenn das Übertragungsverhalten nur durch das Glied mit dem grössten Exponent bestimmt wird. Die Forderung, dass unabhängig von der Filterordnung bei  $\Omega=1$  der  $-3.01\text{dB}$ -Punkt erreicht wird, wird durch den Leitkoeffizienten  $A_{2n}$  bestimmt. Aus dieser Forderung folgt  $A_{2n}=1$  und zwar für jede Filterordnung.

Daher gilt für den normierten Amplitudengang des Butterworth-Tiefpass:

$$|F(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^{2n}}} \quad n: \text{Filterordnung} \quad (3-35)$$

Die Koeffizientenbestimmung kann für die Übertragungsfunktion nach Gl. (3-32) kann durch Koeffizientenvergleich als allgemeine Lösung erfolgen:

$$\left| \frac{1}{1 + a_1 S + a_2 S^2 + \dots + a_n S^n} \right|_{S=j\Omega} = \left| \frac{1}{\sqrt{1 + (-jS)^{2n}}} \right|_{\Omega=-jS} \quad (3-36)$$

Die Gleichung ist erfüllt wenn auf beiden Seiten dieselben Nennernullstellen gelten. Daher wird die Lösung:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + (-jS_p)^{2n}} = 0 & \quad \rightarrow \quad -1 = (-jS_p)^{2n} \\ \sqrt[2n]{-1} = -jS_{pk} = -\sin\left(\frac{1+2k}{2n}\pi\right) + j\cos\left(\frac{1+2k}{2n}\pi\right) & \quad k = 0..n-1 \end{aligned} \quad (3-37)$$

Alle Pole  $S_{pk}$  liegen auf dem Einheitskreis. Da durch das Quadrieren doppelt so viele Lösungen entstanden sind, werden nur die Lösungen mit negativem Realteil berücksichtigt. Die entspricht dem Index  $k=0..n-1$ :

$$S_{pk} = -\sin\left(\frac{1+2k}{2n}\pi\right) + j\cos\left(\frac{1+2k}{2n}\pi\right) \quad k = 0..n-1 \quad \textbf{Butterworth-Pole} \quad (3-38)$$

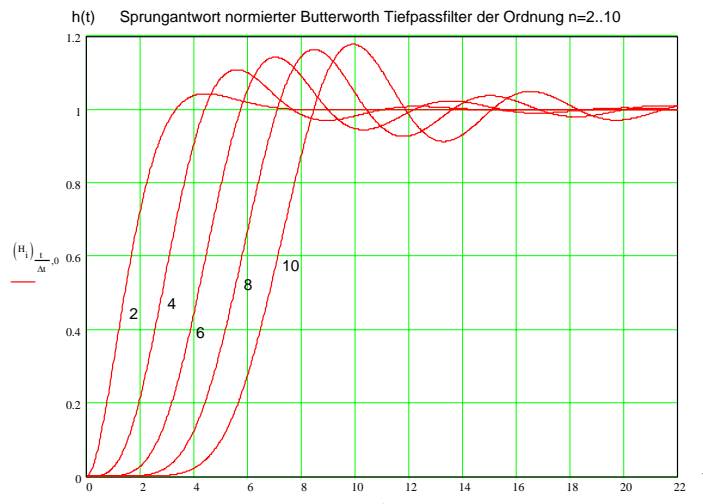
### 3.7.2.3 Begründung der minimal notwendigen Filterordnung

Die für eine bestimmte Sperrforderung  $A_H$  bei einer Frequenz  $f_H$  lässt sich für den Tiefpass mit einer DC-Verstärkung (oder -Dämpfung)  $A_0$  direkt auf der Formel für den Amplitudengang ableiten:

$$\begin{aligned} A_H &= \frac{A_0}{\sqrt{1 + \Omega_S^{2n}}} & \Omega_S &= \frac{f_H}{f_C} \\ A_H^2 &= \frac{A_0^2}{1 + \Omega_S^{2n}} & \rightarrow & \quad \Omega_S^{2n} = \frac{A_0^2}{A_H^2} - 1 = \left(\frac{A_0}{A_H}\right)^2 - 1 & \rightarrow & \quad 2n \cdot \ln(\Omega_S) = \ln\left(\left(\frac{A_0}{A_H}\right)^2 - 1\right) \\ \Rightarrow n &\geq \frac{\ln\left(\left(\frac{A_0}{A_H}\right)^2 - 1\right)}{2 \cdot \ln\left(\frac{f_H}{f_C}\right)} \end{aligned} \quad \textbf{Minimal notwendige Filterordnung Butterworth} \quad (3-39)$$

### 3.7.2.4 Verhalten der Butterworth-Filter im Zeitbereich

Die Sprungantwort der Butterworth-Filter zeigt ein leichtes Überschwingen, dass mit steigender Filterordnung wächst:



**Bild 3-35:**  
Sprungantwort normierter Butterworth-Tiefpässe.

Allgemein kann die Sprungantwort durch Laplace-Rücktransformation der Übertragungsfunktion, multipliziert mit dem Einheitssprung, bestimmt werden.

$$h(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{s} \cdot G(s)\right) \quad (3-40)$$

Es existiert aber keine allgemeine Lösung für alle Filterordnungen. Numerische Verfahren sind ebenfalls geeignet.

### 3.7.2.5 Zerlegung in quadratische und lineare Teilfilter

Für eine Vorbereitung zur Laplace-Rücktransformation oder eine praktische Realisation mit aktiven Teilschaltungen wird die Übertragungsfunktion höherer Ordnung in ein Produkt quadratischer Glieder und ev. eines linearen Gliedes zerlegt:

$$G(s) = \frac{A_0}{\prod_{i=1}^n (1 + b_{1i}s + b_{2i}s^2)} \quad A_0 = DC - \text{Verstärkung} \quad (3-41)$$

(Wobei durchaus ein  $b_{2i}$  Null sein darf.)

#### Begründung:

Reelle Pole treten bei schwingfähigen Strukturen höchstens einfach auf und stellen ein lineares Glied mit reellem Koeffizient dar. Komplexe Glieder treten immer konjugiert komplex auf. Fasst man konjugiert komplexe Glieder zu einem quadratischen Glied zusammen, haben diese immer reelle Koeffizienten.

Filter ungerader Ordnung haben wegen der reellen Polstelle immer ein lineares Glied. Filter gerader Ordnung werden in rein quadratische Produkte zerlegt.

Diese Form der Zerlegung reduziert auch den Dimensionierungs-/Schaltungsaufwand erheblich und ist bei aktiven Filter auch aus Stabilitätsgründen sinnvoll.

**Beispiel 3-10:** Zerlegung der Übertragungsfunktion in lineare und quadratische Glieder.

Die Polstellen beschriebene Übertragungsfunktion eines Butterworth-TP 5. Ordnung soll in ein Produkt linearer und quadratischer Glieder zerlegt werden.

**Lösung:**

Die Butterworth-Pole 5. Ordnung liegen nach (3-38) bei

$$S_p = \begin{pmatrix} -0.30902 + 0.95106j \\ -0.80902 + 0.58779j \\ -1 \\ -0.80902 - 0.58779j \\ -0.30902 - 0.95106j \end{pmatrix}$$

Die Polstellen werden für die Übertragungsfunktion negativ eingesetzt und man erhält das Produkt:

$$G(S) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{S}{-S_{p_i}}}$$

$$G(S) = \frac{1}{1+S} \frac{1}{1 + \frac{S}{0.30902 - 0.95106j}} \frac{1}{1 + \frac{S}{0.30902 + 0.95106j}} \frac{1}{1 + \frac{S}{0.80902 - 0.58779j}} \frac{1}{1 + \frac{S}{0.80902 + 0.58779j}}$$

$$= \frac{1}{1+S} \frac{1}{1 + 0.61803S + S^2} \frac{1}{1 + 1.61803S + S^2}$$

**Beispiel 3-11:** Zerlegung der Übertragungsfunktion in lineare und quadratische Glieder.

Die polynomiale Übertragungsfunktion soll in ein Produkt linearer und quadratischer Glieder zerlegt werden:

$$G(S) = \frac{1}{1 + 2.61313S + 3.41421S^2 + 2.61313S^3 + S^4}$$

**Lösung:**

Mit einem geeigneten Nullstellenverfahren (z.B. Bairstow [KRU00], oder Moore [CUT83]) werden im Nennerpolynom Linear- oder direkt quadratische Faktoren abgespalten.

$$G(S) = \frac{1}{(1 + 1.8478S + S^2)(1 + 0.76536S + S^2)}$$

Die Lösung verkörpert einen normierten Butterworth-TP,4. Ordnung.

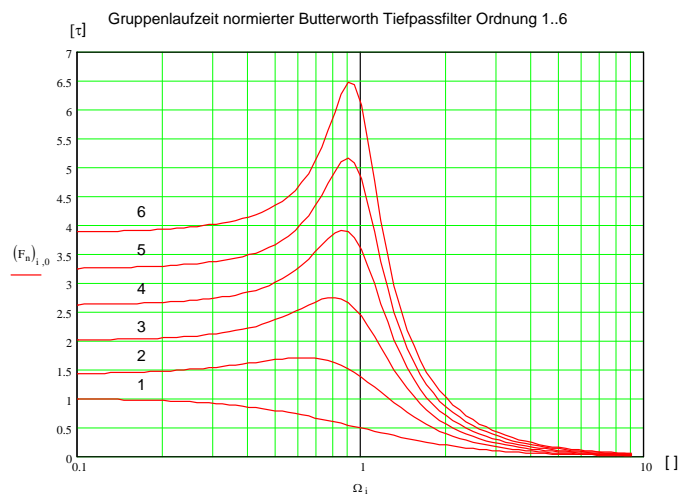
### 3.7.2.6 Gruppenlaufzeit Butterworth-Filter

Die Gruppenlaufzeit beschreibt die Durchlaufzeit der Signale durch das Filter. Sie ist im Regelfall frequenzabhängig und sollte für ein gutes Impulsverhalten im Durchlassbereich möglichst konstant sein. Die Gruppenlaufzeit ist definiert:

$$t_{gr} = -\frac{d\varphi}{d\omega} = \frac{T_{gr}}{2\pi f_C} \quad \text{Gruppenlaufzeit} \quad (3-42)$$

$$\tau = T_{gr} = -\frac{d\varphi}{d\Omega} \quad \text{Normierte Gruppenlaufzeit} \quad (3-43)$$

Die grafische Darstellung zeigt im Bereich der Grenzfrequenz eine leichte Überhöhung. Das Impulsverhalten ist daher schlechter als bei Bessel- oder Gauss-Filter:



**Bild 3-36:**  
Normierte Gruppenlaufzeit von Butterworth-Tiefpässen.

#### Beispiel 3-12: Gruppenlaufzeit Butterworth 4. Ordnung

Man bestimme die Durchlaufzeit eines Signals von  $f_1=500\text{Hz}$  und  $f_2=9\text{kHz}$  bei einem Butterworth-TP 4.Ordnung mit Grenzfrequenz  $f_C=10\text{kHz}$ :

#### Lösung:

Die normierten Frequenzen werden berechnet und damit aus der Grafik die normierte Gruppenlaufzeiten gelesen und entnormiert:

$$\begin{aligned}
 f_1 &:= 500 \quad [\text{Hz}] & f_2 &:= 9 \cdot 10^3 \quad [\text{Hz}] & f_C &:= 10 \cdot 10^3 \quad [\text{Hz}] \\
 \Omega_1 &:= \frac{f_1}{f_C} & \Omega_1 &= 0.05 & & \\
 \Omega_2 &:= \frac{f_2}{f_C} & \Omega_2 &= 0.9 & & \\
 T_{gr2} &:= 3.8 & & & & \text{(Werte aus Tabelle gelesen)} \\
 T_{gr1} &:= 2.6 & & & & \\
 t_{gr1} &:= \frac{T_{gr1}}{2\pi f_C} & t_{gr1} &= 4.138 \times 10^{-5} \quad [\text{s}] & & \\
 t_{gr2} &:= \frac{T_{gr2}}{2\pi f_C} & t_{gr2} &= 6.048 \times 10^{-5} \quad [\text{s}] & & 
 \end{aligned}$$

### 3.7.3 Bessel-Filter (Thomson-Filter)

Sie wurden durch W.E. Thomson 1949 als *maximal flat delay filter* vorgestellt. Sie übertragen das Signal verzerrungsfrei und haben daher ein ausgezeichnetes Impulsverhalten. Die Gruppenlaufzeit ist im Durchlassbereich konstant und zeigen kein Überschwingen in der Sprungantwort. Die Flankensteilheit ist aber etwas schlechter als bei Butterworth-Filtern. Bessel-Filter werden bei hohen Anforderungen an Phasenlinearität und Impulsverhalten verwendet. Der Phasengang ist absolut frequenzproportional.

#### 3.7.3.1 Bessel-Approximation

Eine Sprungantwort wird verzerrungsfrei übertragen, wenn die Übertragungsfunktion  $G(s)$  nach (3-44) beschaffen ist:

$$G(s) = \frac{1}{e^{s\tau}} = e^{-s\tau} \quad (3-44)$$

Der Parameter  $\tau$  definiert die Verzögerungszeit.

Die Näherung erfolgt so, dass der Nenner in (3-44) geeignet durch ein Polynom  $n$ -ten Grades dargestellt wird. Zur Lösung wurden verschiedene Ansätze gezeigt [STO54],[ZVE54],[CHE94].

W. E. Thomson und L. Storch empfehlen die Näherung der ersten  $n$  Glieder der Reihe  $e^{s\tau}$  über ein Bessel-Polynom  $n$ -ten Grades.

$$e^{s\tau} \approx PB_n(s\tau) = \sum_{i=0}^n b_i (s\tau)^i \quad b_i = \frac{(2n-i)!}{2^{n-i} (n-i)! \cdot i!} \quad (3-45)$$

Die normierte Tiefpass-Übertragungsfunktion, dargestellt mit einem Bessel-Polynom, wird mit (3-45):

$$G(s) = \frac{1}{PB_n(S)} \quad PB_n(S) = \frac{\sum_{i=0}^n b_i \cdot S^i}{b_0} \quad n: \text{Polynomgrad} \geq 1 \quad (3-46)$$

Die Bessel-Polynome werden für  $n=1..5$  konkret:

$n$	$PB(n)$
1	$1 + s$
2	$1 + s + \frac{1}{3}s^2$
3	$1 + s + \frac{6}{15}s^2 + \frac{1}{15}s^3$
4	$1 + s + \frac{45}{105}s^2 + \frac{10}{105}s^3 + \frac{1}{105}s^4$
5	$1 + s + \frac{420}{945}s^2 + \frac{105}{945}s^3 + \frac{15}{945}s^4 + \frac{1}{945}s^5$



Die Pole werden durch Bestimmen der Nullstellen der Bessel-Polynome bestimmt. Daher existiert auch keine einfache Formel zur Berechnung der Pole, weil zusätzlich noch Korrekturen für eine -3.01-dB Normierung notwendig sind. Die Leitkoeffizienten werden für höhere Ordnungen sehr klein. Daher ist die präzise numerische Bestimmung der Nullstellen anspruchsvoll. In der Praxis wird deshalb meist mit tabellierten Werten gearbeitet.

**Beispiel 3-13:** Berechnung Pole Bessel-Normtieffpass

Für ein Bessel-Tiefpass 3. Ordnung sind die normierten Pole zu bestimmen.

**Lösung:**

Formal: 
$$b(i, n) := \frac{(2 \cdot n - i)!}{2^{n-i} \cdot i! \cdot (n - i)!}$$
 Koeffizienten des normierten Besselpolynoms mit Grad n.

$$P_B(s, n) := \sum_{i=0}^n (b(0, n)^{-1} \cdot b(i, n) \cdot s^i)$$
 Bessel-Polynom vom Grad n

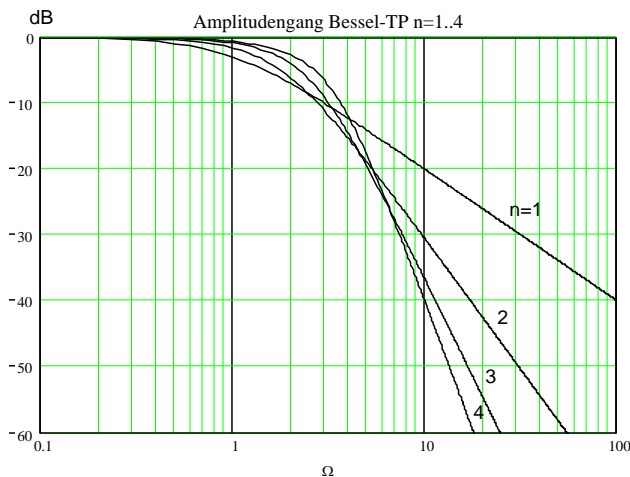
**Nicht 3dB-Normierte Besselkoeffizienten und Pole**

n := 3  
i := 0..n

besselkoeff<sub>i</sub> := b(i, n)

Sp := nullstellen(besselkoeff) 
$$Sp = \begin{pmatrix} -2.32219 \\ -1.83891 + 1.75438i \\ -1.83891 - 1.75438i \end{pmatrix}$$
 besselkoeff = 
$$\begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ein Vergleich mit den tabellierten Werten zeigt andere Pole. Dies rührt daher, dass mit der Definition (3-46) nur für das Filter 1. Ordnung der -3dB Punkt bei  $\Omega=1$  liegt:



**Bild 3-37:** Amplitudengang von nicht 3-dB-korrigierten Bessel-Tiefpässen mit Koeffizienten gemäss Gl. (3-46).

Damit für alle Filterordnungen bei  $\Omega=1$  der -3dB erreicht wird, müssen bei Filter mit Ordnung > 2 die Pole mit einem Korrekturfaktor umgerechnet werden:

$$S_{P_{3dB}} = \frac{S_P}{k} \tag{3-47}$$

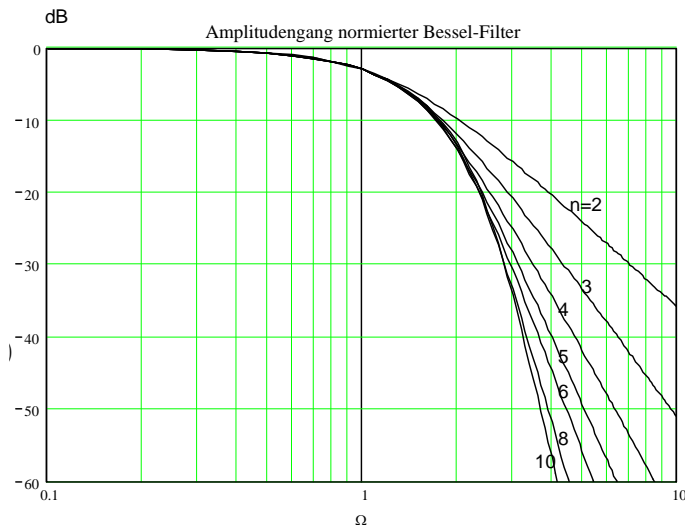
Der Korrekturfaktor k wird ordnungsabhängig:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k	1	0.73440	0.56958	0.47306	0.41196	0.36991	0.33878	0.3145	0.29484	0.27838

**Tabelle 1:**

Faktoren für 3-dB-Korrektur bei Bessel-Tiefpässen.

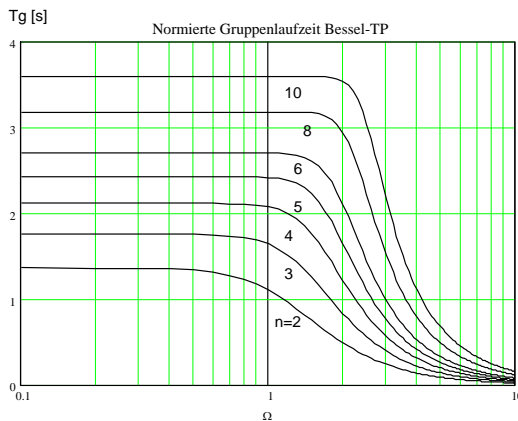
Dieser Korrekturfaktor  $k$  entspricht dem Kehrwert der normierten Gruppenlaufzeit bei  $\Omega=0$ . Mit den so korrigierten Polwerten erhalten wir für alle Filterordnungen eine  $-3.01\text{dB}$ -Grenzfrequenz bei  $\Omega=1$ :



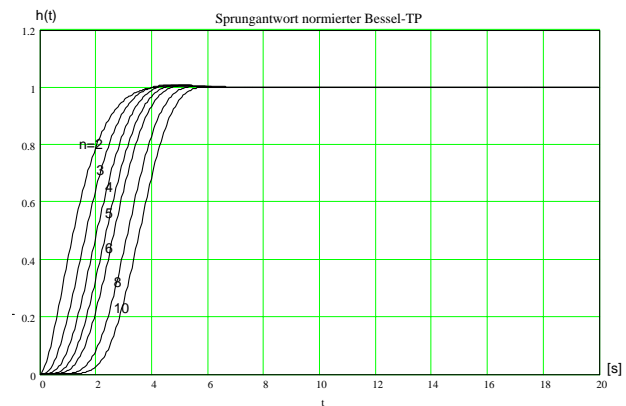
**Bild 3-38:**  
Amplitudengang von normierten Bessel-Tiefpässen mit 3-dB-korrigierten Koeffizienten

### 3.7.3.2 Zeit- und Laufzeitverhalten

Bessel-Filter haben im Durchlassbereich konstante Gruppenlaufzeit und kein Überschwingen in der Sprungantwort. Die grafische Darstellung der normierten Gruppenlaufzeit und Sprungantwort werden:



**Bild 3-40:**  
Normierte Gruppenlaufzeiten von Bessel-Tiefpässen.



**Bild 3-39:**  
Normierte Sprungantwort von Bessel-Tiefpässen. Sie zeigen überhaupt kein Überschwingen und zeigen daher optimales Impulsverhalten.

**Beispiel 3-14:** Durchlaufzeit beim Bessel-Tiefpass

Man bestimme die Durchlaufzeit eines Signals von 2kHz bei einem Bessel-Tiefpass 6. Ordnung mit einer Grenzfrequenz von 4 kHz.

**Lösung:**

Aus dem Graphen für die normierte Gruppenlaufzeit liest man für  $n=6$  und  $\Omega=0.5$ :  $T_G=2.7$ . Alternativ kann  $T_G$  auch über den Kehrwert für  $k=6$  berechnet werden. Mit Gl. (3-43) wird die Laufzeit:

$$T_G(\omega) = \frac{T_G(\Omega)}{\omega_C} \quad \rightarrow \quad t_g = \frac{T_G(0.5)}{2\pi \cdot f_C} = \frac{2.703}{2\pi \cdot 2000} = 215.01 \mu s$$

**Beispiel 3-15:** Dimensionierung Bessel-Tiefpass 3. Ordnung

Anforderungen: Grenzfrequenz  $f_C=1\text{kHz}$ , Sperrdämpfung  $A_H=20\text{dB}$  bei 3kHz. Realisation mit quadratischem Teilfilter mit Mehrfach-Gegenkopplung. Die Kondensatoren sind 1/10/100nF kleinstmöglich zu wählen.

**Lösung:**

Notwendige Filterordnung bestimmen, indem mit  $\Omega_H$  im Graphen in Bild 3-38 die minimal notwendige Filterordnung  $n$  bestimmt wird:

$$\Omega_H = \frac{\omega_H}{\omega_C} = \frac{3000}{1000} = 3 \quad \rightarrow n = 3$$

Die Dimensionierung erfolgt für das quadratische Glied direkt mit Polfrequenz und Polgüte. Die normierten Werte werden aus der Tabelle gelesen und direkt in die Dimensionierungsformeln eingesetzt.

**Vorgaben:**  $f_C := 1 \cdot 10^3 \text{Hz}$        $A_0 := -1$  (Wahl)  
 $C := 1 \cdot 10^{-9} \text{F}$

Aus der Tabelle werden die Polfrequenzen und Polgüten:

$$\Omega_{PT} := \begin{pmatrix} 1.32267580 \\ 1.44761713 \end{pmatrix} \quad Q_{PT} := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.6910466 \end{pmatrix}$$

**Berechnung der Elementwerte: (Lineares Glied)**

$$\begin{aligned} \omega_C &:= 2\pi \cdot f_C \\ \Omega_P &:= \Omega_{PT_0} & \Omega_P &= 1.323 \\ R &:= \frac{1}{\Omega_P \cdot \omega_C \cdot C} & R &= 1.203 \times 10^5 \Omega \end{aligned}$$

**Berechnung der Elementwerte: (Quadratisches Glied )**

$$\begin{aligned} \Omega_P &:= \Omega_{PT_1} & \Omega_P &= 1.448 \\ Q_P &:= Q_{PT_1} & Q_P &= 0.691 \\ C_5 &:= C \\ C_3 &:= 4 \cdot Q_P^2 \cdot (1 + |A_0|) \cdot C_5 & C_3 &= 3.82 \times 10^{-9} \text{F} & C_3 &:= 10 \cdot 10^{-9} \text{F} \quad (\text{Wahl}) \end{aligned}$$

(1. Wahlmöglichkeit)

$$R_{21} := \frac{C_3 + \sqrt{C_3^2 - 4 \cdot C_3 \cdot C_5 \cdot (1 + |A_0|)} \cdot Q_P^2}{2 \cdot C_3 \cdot C_5 \cdot Q_P \cdot \Omega_P \cdot \omega_C} \quad R_{21} = 1.421 \times 10^5 \Omega$$

$$R_{41} := \frac{1}{R_{21} \cdot C_3 \cdot C_5 \cdot \Omega_P^2 \cdot \omega_C^2} \quad R_{41} = 8.507 \times 10^3 \Omega$$

$$R_{11} := \frac{R_{21}}{-A_0} \quad R_{11} = 1.421 \times 10^5 \Omega$$

(2. Wahlmöglichkeit)

$$R_{22} := \frac{C_3 - \sqrt{C_3^2 - 4 \cdot C_3 \cdot C_5 \cdot (1 + |A_0|)} \cdot Q_P^2}{2 \cdot C_3 \cdot C_5 \cdot Q_P \cdot \Omega_P \cdot \omega_C} \quad R_{22} = 1.701 \times 10^4 \Omega$$

$$R_{42} := \frac{1}{R_{22} \cdot C_3 \cdot C_5 \cdot \Omega_P^2 \cdot \omega_C^2} \quad R_{42} = 7.104 \times 10^4 \Omega$$

$$R_{12} := \frac{R_{22}}{-A_0} \quad R_{12} = 1.701 \times 10^4 \Omega$$

**Wahl:**  $R_1 := R_{11}$        $R_2 := R_{21}$        $R_4 := R_{41}$

**Grafik:**

$$\text{dB}(x) := 20 \cdot \log(x) \quad j := \sqrt{-1}$$

$$G_2(s, R_1, R_2, C_3, R_4, C_5) := \frac{-R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + \left( \frac{R_2 \cdot R_4}{R_1} + R_2 + R_4 \right) \cdot C_5 \cdot s + R_2 \cdot R_4 \cdot C_3 \cdot C_5 \cdot s^2}$$

$$G_1(s, R, C) := \frac{1}{1 + s \cdot R \cdot C}$$

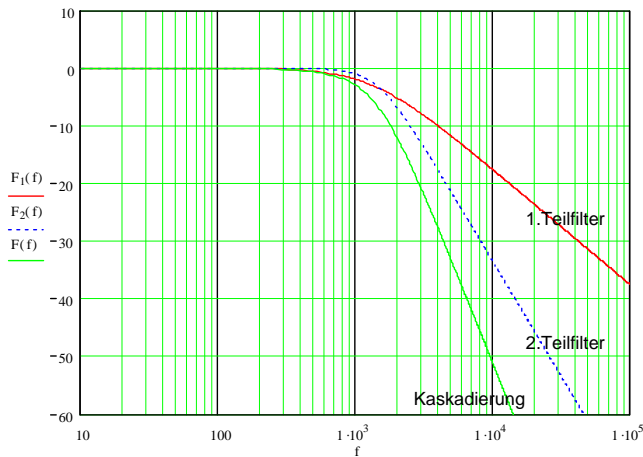
$$F_1(f) := \text{dB} \left( \left| G_1(\tilde{f} 2\pi \cdot j, R, C) \right| \right) \quad \text{Amplitudengang 1. Teilfilter}$$

$$F_2(f) := \text{dB} \left( \left| G_2(\tilde{f} 2\pi \cdot j, R_1, R_2, C_3, R_4, C_5) \right| \right) \quad \text{Amplitudengang 2. Teilfilter}$$

$$F(f) := F_1(f) + F_2(f) \quad \text{Amplitudengang Kaskadierung}$$

f := 10, 50, 100000

Kaskadierter Bessel-TP 3. Ordnung



**Kontrolle der Dämpfung bei Grenzfrequenz:**

$$F(100\text{Hz}) = -3.01 \text{ [dB]}$$

### 3.7.4 Tschebyscheff-Filter

Tschebyscheff-Filter lassen im Durchlassbereich eine definierte Welligkeit zu. Im Gegenzug werden bessere Selektivitätseigenschaften, d.h. grössere Flankensteilheit, erreicht. Mit Tschebyscheff-Charakteristik lassen sich maximal steile Filter realisieren, wenn keine Welligkeit im Sperrbereich zugelassen wird.

Die Gruppenlaufzeitkonstanz und damit das Impulsverhalten sind wegen der Welligkeit wesentlich schlechter. Für normale Anforderungen stellen Tschebyscheff-Filter aber den Standard dar, da sie eine ordnungsminimale Realisation mit einfachen Schaltungen erlauben.

#### 3.7.4.1 Tschebyscheff-Approximation

Die Tschebyscheff-Amplitudencharakteristik wird erreicht, wenn die (normierte) Übertragungsfunktion im Nenner durch ein Tschebyscheff-Polynom dargestellt wird. Der Amplitudengang wird dann:

$$|F(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\varepsilon \cdot T_n(\Omega))^2}} \quad \begin{array}{l} \varepsilon : \text{Welligkeitsfaktor} \\ T_n(s) : \text{Tschebyscheff-Polynom der Ordnung } n \end{array} \quad (3-48)$$

Der Welligkeitsfaktor  $\varepsilon$  definiert zulässige Welligkeit im Durchlassbereich. Die Tschebyscheff-Polynome sind rekursiv definiert und werden für  $n=1..5$  konkret:

$$T_{n+1}(\Omega) = 2\Omega T_n(\Omega) - T_{n-1}(\Omega) = \begin{cases} \cos((n+1) \cdot \arccos(\Omega)) & \Omega \leq 1 \\ \cosh((n+1) \cdot \operatorname{arcosh}(\Omega)) & \Omega > 1 \end{cases} \quad (3-49)$$

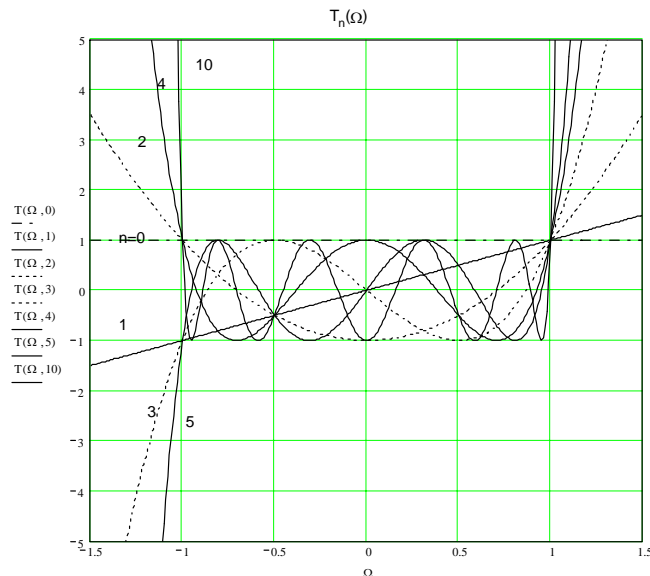
$n$	$T_n(s)$
1	$\Omega$
2	$2\Omega^2 - 1$
3	$4\Omega^3 - 3\Omega$
4	$8\Omega^4 - 8\Omega^2 + 1$
5	$16\Omega^5 - 20\Omega^3 + 5\Omega$

Die allgemeine Definition mit cos/cosh entsteht aus der Lösung der zugehörigen Differenzialgleichung. Sie bildet auch die Grundlage zur einfachen Bestimmung der Pole und Koeffizienten für die Dimensionierung.

### 3.7.4.2 Eigenschaften der Tschebyscheff-Polynome

Tschebyscheff-Polynome oszillieren im Bereich  $[-1,1]$  mit einer definierten Amplitude dann für  $n > 0$  streng monoton ansteigen:

$$T(\Omega, n) := \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ \Omega & \text{if } n = 1 \\ 2 \cdot \Omega \cdot T(\Omega, n-1) - T(\Omega, n-2) & \text{otherwise} \end{cases}$$



**Bild 3-41:** Funktionsverlauf der Tschebyscheff-Polynome vom Grad 0..5 und 10.

Aus mathematischer Sicht hat  $T_n(\Omega)$  die Eigenschaften:

1.  $T_n(1) = 1$
2.  $T_n(\Omega)$  ist gerade (ungerade), wenn  $n$  gerade (ungerade)
3.  $T_n(\Omega)$  schwingt zwischen  $+1$  in  $[-1, +1]$
4.  $T_n(\Omega)$  hat alle Nullstellen in  $(-1, +1)$
5.  $T_n(\Omega)$  hat den Grad  $n$

Tschebyscheff-Filter haben bei gleicher Filterordnung eine grössere Flankensteilheit als Butterworth-, Bessel- oder Filter mit kritischer Dämpfung.

Per Definition liegt bei Tschebyscheff-Filtern (und anderen Filtern mit Welligkeit im Durchlassbereich) die  $-3\text{dB}$ -Frequenz nicht mehr bei  $\Omega = 1$ . Die Grenzfrequenz wird dort definiert, wo die Welligkeit erstmals überschritten wird. Ein Tschebyscheff-Filter mit  $0.1\text{dB}$  Welligkeit hat bei der Grenzfrequenz eine Dämpfung von  $0.1\text{dB}$ .

### 3.7.4.3 Pole des normierten Tschebyscheff-Tiefpass

Durch Bestimmen der Nenner-Nullstellen der Übertragungsfunktion kann eine allgemeine Lösung zur Berechnung der Pole für normierte Tschebyscheff-Tiefpassfilter gefunden werden:

$$\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_{dB}}{10}} - 1} \quad A_{dB} : \text{Welligkeit im Durchlassbereich [dB]} \quad (3-50)$$

$$S_p = -\sin\left(\frac{1+2k}{2n}\pi\right) \cdot \sinh\left(\frac{1}{n}\operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) + j \cos\left(\frac{1+2k}{2n}\pi\right) \cdot \cosh\left(\frac{1}{n}\operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) \quad \begin{array}{l} n : \text{Filterordnung} \\ k : 0 \dots n-1 \end{array} \quad (3-51)$$

Die Pole liegen geometrisch auf einer Ellipse. Je kleiner der Wert der kleinen Halbachse, desto grösser die Welligkeit und damit die Flankensteilheit.

**Pole von normierten Tschebyscheff-Tiefpässen der Ordnung 1..5:**

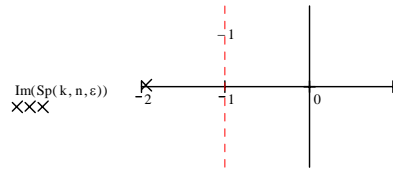
$$Sp(k, n, \epsilon) := -\sin\left(\frac{1 + 2 \cdot k}{2 \cdot n} \pi\right) \cdot \sinh\left(\frac{1}{n} \cdot \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right) + j \cdot \cos\left(\frac{1 + 2 \cdot k}{2 \cdot n} \pi\right) \cdot \cosh\left(\frac{1}{n} \cdot \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)$$

$$\epsilon := \sqrt{10^{\frac{A_{rdB}}{10}} - 1} \quad A_{rdB} := 1 \quad (1 \text{ dB Welligkeit}) \quad \epsilon = 0.509$$

$$n := 1 \quad k := 0..n - 1$$

$$Sp(k, n, \epsilon) =$$

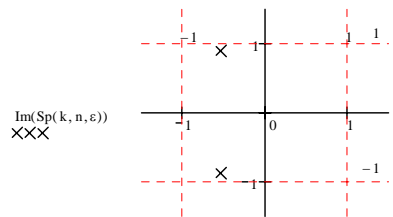
-1.965
--------



$$n := 2 \quad k := 0..n - 1$$

$$Sp(k, n, \epsilon) =$$

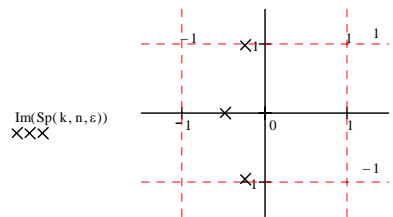
-0.549+0.895j
-0.549-0.895j



$$n := 3 \quad k := 0..n - 1$$

$$Sp(k, n, \epsilon) =$$

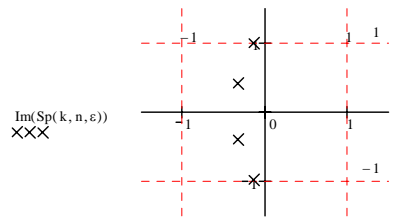
-0.247+0.966j
-0.494
-0.247-0.966j



$$n := 4 \quad k := 0..n - 1$$

$$Sp(k, n, \epsilon) =$$

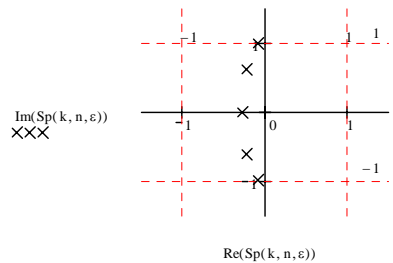
-0.14+0.983j
-0.337+0.407j
-0.337-0.407j
-0.14-0.983j



$$n := 5 \quad k := 0..n - 1$$

$$Sp(k, n, \epsilon) =$$

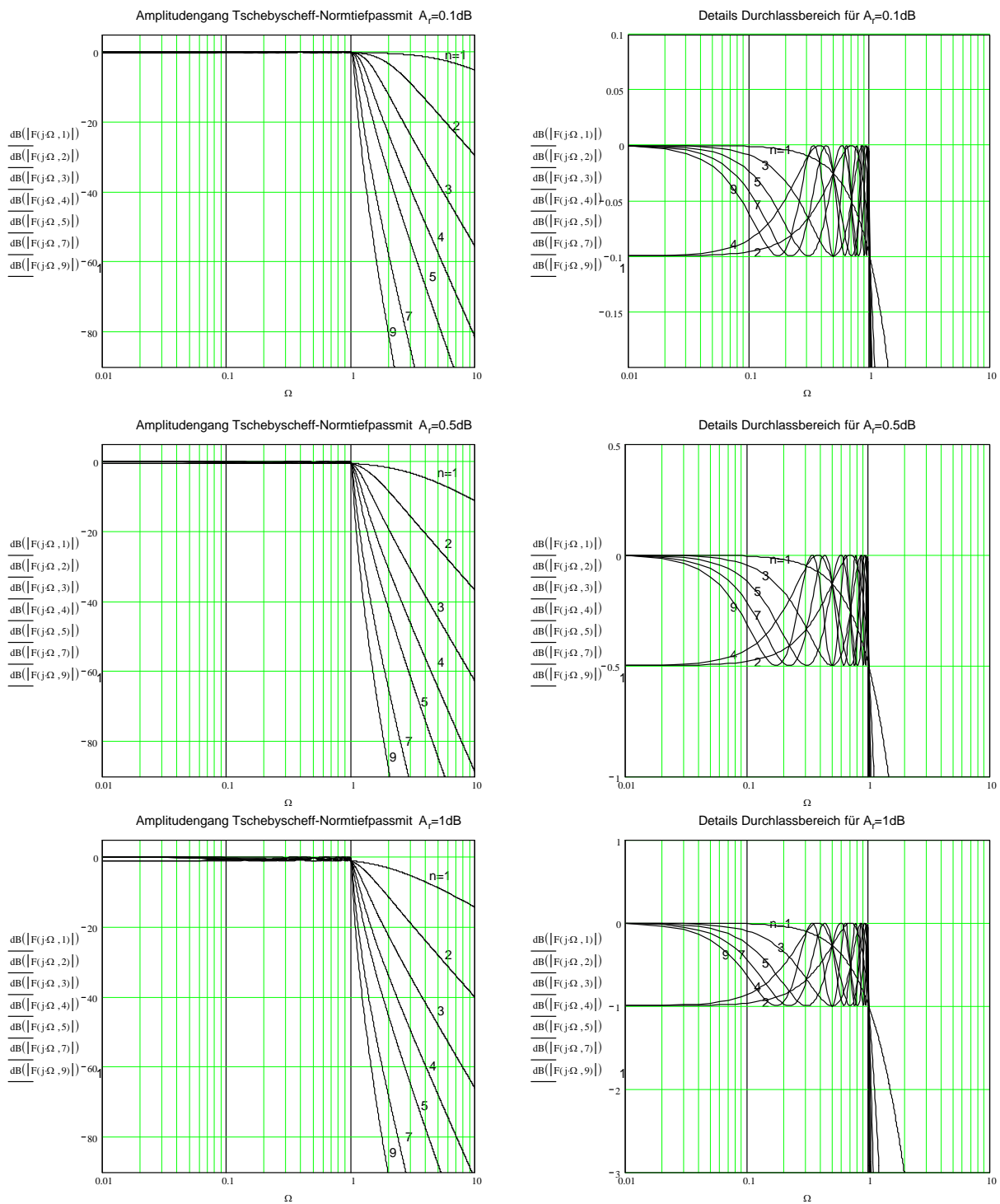
-0.089+0.99j
-0.234+0.612j
-0.289
-0.234-0.612j
-0.089-0.99j



**Bild 3-42:**

Normierte Pole von Tschebyscheff-Tiefpässen hier gezeigt am Beispiel mit Welligkeit  $A_r=1\text{dB}$ .

Der Amplitudengang wird für verschiedene Welligkeiten  $A_r$  und Ordnungen  $n$ :



**Bild 3-43:**

Amplitudengang normierter Tschebyscheff-Tiefpässe mit Welligkeiten von 0.1, 0.5 und 1dB mit Detailansicht der Welligkeit im Durchlassbereich.

Tschebyscheff-Tiefpässe gerader Ordnung weisen eine Anfangsdämpfung in der Grösse der Welligkeit auf. Weil diese mit passiven Filtern schwierig zu realisieren ist (mit reinen L-C Strukturen kann keine Anfangsdämpfung erreicht werden), wird für passive Tschebyscheff-Filter meist eine ungerade Ordnung gewählt. Bei Realisation mit aktiven Filtern stellt die Anfangsdämpfung kein Problem dar, weil gerade wie ungerade Ordnungen einfach realisiert werden können.



### 3.7.4.4 Minimale Filterordnung, -3-dB Frequenz

Die minimale notwendige Filterordnung kann durch Umformen der Gl. (3-48) mit (3-49) direkt bestimmt werden:

$$n \geq \frac{\operatorname{arcosh} \left( \sqrt{\frac{10^{\frac{A_H}{10}} - 1}{10^{\frac{A_r}{10}} - 1}} \right)}{\operatorname{arcosh}(\Omega_H)} = \frac{\operatorname{arcosh} \left( \sqrt{\frac{10^{\frac{A_H}{10}} - 1}{\varepsilon^2}} \right)}{\operatorname{arcosh}(\Omega_H)}$$

(3-52)

### Minimal notwendige Filterordnung Tschebyscheff

$A_H$  : Sperrdämpfung in dB bei  $f_H$  (als positiver Wert)

$A_r$  : Welligkeit im Durchlass in dB

$$\Omega_H = \frac{f_C}{f_H}$$

Per Definition liegt bei Tschebyscheff-Filtern die Grenzfrequenz, wo die Welligkeit erstmals überschritten wird. Daher liegt die -3dB-Frequenz ausser für  $A_r=3\text{dB}$  liegt nicht bei  $\Omega=1$ . Die 3dB-Frequenz kann aber allgemein aus Gl. (3-48) für das Tschebyscheff-Filter bestimmt werden:

$$f_{3dB} = f_C \cdot \cosh \left( \frac{\operatorname{arcosh} \left( \frac{1}{\varepsilon} \right)}{n} \right)$$

(3-53)

$f_C$  : Grenzfrequenz

$\varepsilon$  : Welligkeitsfaktor

$n$  : Filterordnung

### -3dB Frequenz Tschebyscheff

#### Beispiel 3-16: Minimal notwendige Filterordnung Tschebyscheff

Welche Ordnung muss ein Tschebyscheff-Filter mit Welligkeit 1dB und Grenzfrequenz 400Hz mindestens haben, wenn bei einer Frequenz von 800Hz eine Sperrdämpfung von 50dB erreicht werden soll?

#### Lösung:

Vorgaben:  $f_C := 400$  [Hz]  $A_r := 1$  [dB]

$f_H := 800$  [Hz]  $A_H := 50$  [dB]

Bestimmung der Filterordnung:

$$n := \frac{\operatorname{arcosh} \left( \sqrt{\frac{10^{\frac{A_H}{10}} - 1}{10^{\frac{A_r}{10}} - 1}} \right)}{\operatorname{arcosh} \left( \frac{f_H}{f_C} \right)}$$

n = 5.41

n := ceil(n)      n = 6

#### Beispiel 3-17: -3dB Frequenz beim Tschebyscheff-Filter

Bei welcher Frequenz wird beim Filter aus dem vorherigen Beispiel der -3dB-Punkt erreicht?

#### Lösung:

n = 6  $f_C := 400$  [Hz]  $A_r := 1$  [dB]

$$\varepsilon := \sqrt{10^{0.1A_r} - 1}$$

$\varepsilon = 0.509$

$$f_{3dB} := f_C \cdot \cosh \left( \frac{\operatorname{arcosh} \left( \frac{1}{\varepsilon} \right)}{n} \right)$$

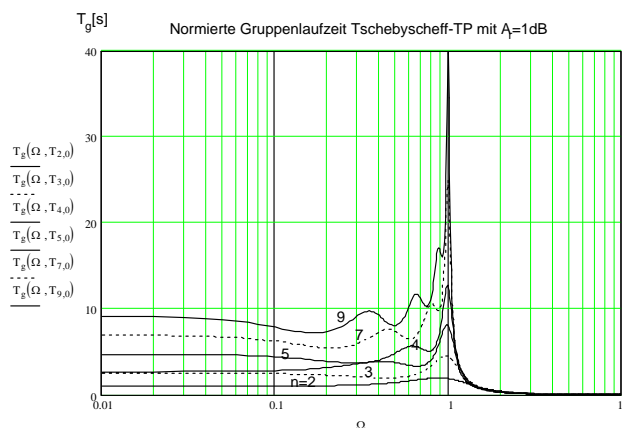
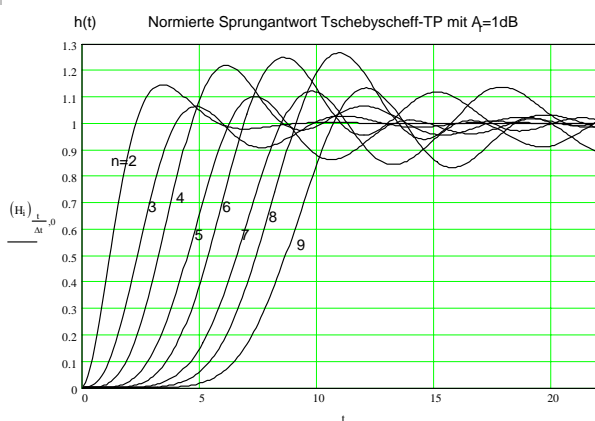
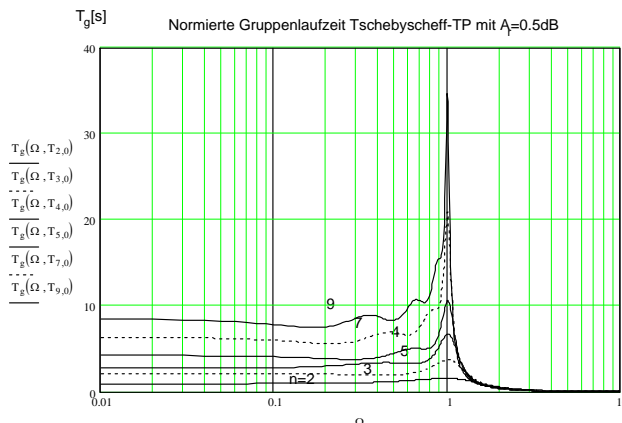
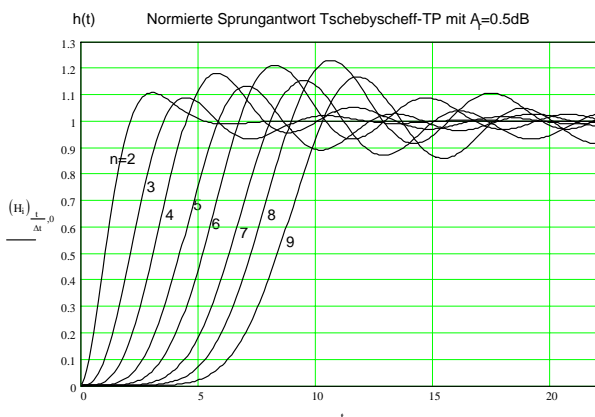
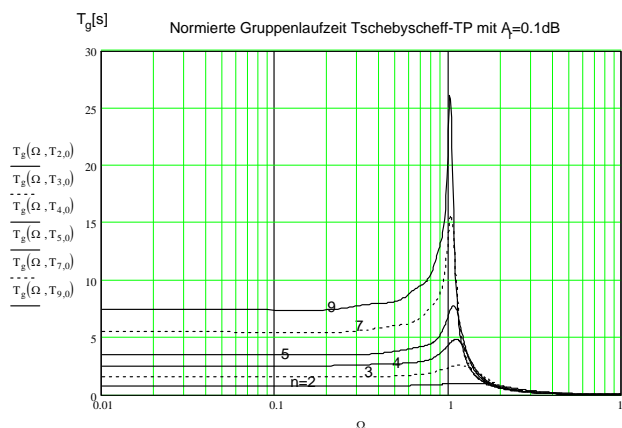
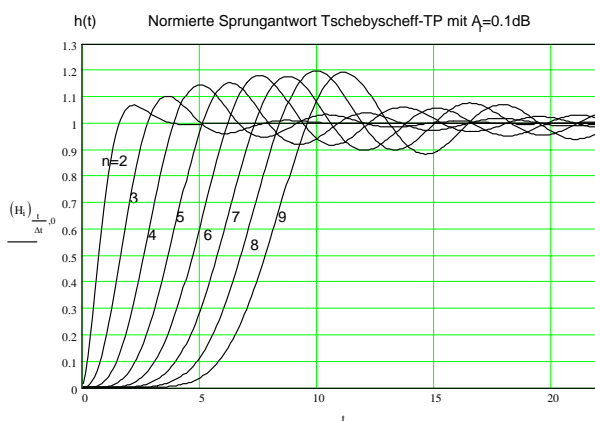
$f_{3dB} = 409.377$  [Hz]

### 3.7.4.5 Zeit- und Laufzeitverhalten

Aufgrund der Welligkeit im Durchlassbereich zeigen Tschebyscheff-Filter ein ausgeprägtes Überschwingen in der Sprungantwort und eine ausgeprägt nicht konstante Gruppenlaufzeit. Das Verhalten verschlechtert sich mit zunehmender Welligkeit.

Wird ein besseres Impulsverhalten bei grosser Flankensteilheit und kleiner Filterordnung verlangt, ist eventuell ein inverses Tschebyscheff oder ev. elliptisches Filter die günstigere Wahl.

Für die Berechnung der Sprungantwort und Gruppenlaufzeit existieren keine allgemein gültigen und einfachen Formeln. Während  $T_g$  noch direkt mit Gl. (3-42) bestimmt werden kann, muss für die Sprungantwort ein Partialbruchzerlegung oder die Differenzialgleichung numerisch gelöst werden.



**Bild 3-44:**

Sprungantwort und Gruppenlaufzeit normierter Tschebyscheff-Tiefpässe mit Welligkeiten von 0.1, 0.5 und 1 dB.

### 3.7.4.6 Elementwerte für passive Tschebyscheff-Filter

Die Elementwerte für den passiven Tschebyscheff-Tiefpass lassen sich sehr einfach berechnen. Aus der allgemeinen Übertragungsfunktion können nach Kap.3.5.2 Dimensionierungsgleichungen abgeleitet werden. Für eine detaillierte Herleitung sei auf die zahlreiche Literatur verwiesen, z.B. [TAI88] und [ELL94].

Zu beachten ist, dass nur Tschebyscheff Filter ungerades Ordnung immer problemlos realisierbar sind. Filter gerader Ordnung können wegen der Anfangsdämpfung nur für ungleiche Eingangs-/ Ausgangsimpedanzen realisiert werden.

Die normierten Elementwerte lauten: (Normierung:  $\omega=1$ ,  $G'=1$ ,  $R'=1$ )

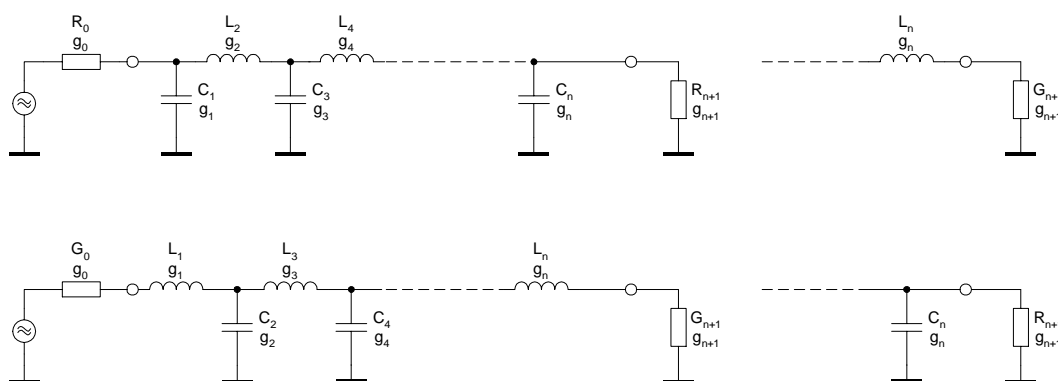
$$\begin{aligned}
 g_0 &= 1 \\
 g_1 &= \frac{2a_1}{q} \\
 g_k &= \frac{4a_{k-1} \cdot a_k}{b_{k-1} \cdot g_{k-1}} \quad k = 2, 3, \dots, n \\
 g_{n+1} &= \begin{cases} 1 & n \text{ ungerade} \\ \coth^2\left(\frac{m}{4}\right) & n \text{ gerade} \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{3-54}$$

**Elementwerte  
Tschebyscheff**

wobei:

$$\begin{aligned}
 m &= \ln\left(\coth\frac{A_r}{40 \cdot \log e}\right) = \ln\left(\coth\frac{A_r}{17.372}\right) \\
 q &= \sinh\frac{m}{2n}
 \end{aligned}
 \tag{3-55}$$

$$\begin{aligned}
 a_k &= \sin\frac{(2k-1)\pi}{2n} \quad k = 1, 2, \dots, n \\
 b_k &= q^2 + \sin^2\frac{k\pi}{n}
 \end{aligned}$$



**Bild 3-45:** Gleichungen für Elementwerte Tschebyscheff Tiefpassfilter und duale Strukturen für Realisation passiver Filter.

Die entnormierten Elementwerte werden wie beim Butterworth-Filter nach (3-31) bestimmt.

**Beispiel 3-18:** Passiver Tschebyscheff-Tiefpass

Man realisiere ein Tiefpass 5. Ordnung für eine Grenzfrequenz von 32kHz und eine Impedanz  $Z_0=Z_L=600\Omega$ . Die Eingangsimpedanz soll für hohe Frequenzen abfallend sein. Die Welligkeit im Durchlassbereich beträgt 0.1dB. Man bestimme zusätzlich die  $-3.01$ dB Frequenz dieses Filters.

**Lösung:**

Da die Charakteristik und Ordnung bereits vorgeben ist können direkt die normierten Elementwerte bestimmt werden. Die Struktur wird aus der Randbedingung, dass  $z_i$  für hohe Frequenzen abfällt, so dass das erste Element eine Kapazität (parallel) ist.

Die Rechnung wird mit MathCad:

**Vorgaben:**

$$Z_0 := 600\Omega \quad n := 5 \quad A_{rdB} := 0.1$$

$$f_c := 32\text{kHz}$$

**Berechnungen:**

Normierte Elementwerte:

$$k := 1..n \quad \text{Indizes der normierten inneren Elemente}$$

$$m := \ln\left(\coth\left(\frac{A_{rdB}}{40 \cdot \log(e)}\right)\right) \quad q := \sinh\left(\frac{m}{2n}\right) \quad a_k := \sin\left[\frac{(2k-1) \cdot \pi}{2n}\right] \quad b_k := q^2 + \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{n}\right)^2$$

$$g_0 := 1$$

$$g_1 := \frac{2a_1}{q}$$

$$k := 2..n$$

$$g_k := \frac{4 \cdot a_{k-1} \cdot a_k}{b_{k-1} \cdot g_{k-1}}$$

$$g_{n+1} := \begin{cases} 1 & \text{if } \text{mod}(n, 2) = 1 \\ \coth\left(\frac{m}{4}\right)^2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

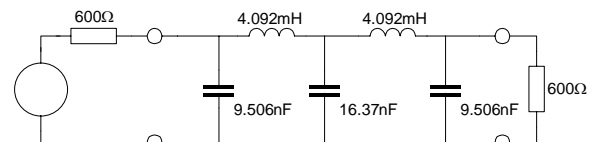
$$g = \begin{pmatrix} 1 \times 10^0 \\ 1.147 \times 10^0 \\ 1.371 \times 10^0 \\ 1.975 \times 10^0 \\ 1.371 \times 10^0 \\ 1.147 \times 10^0 \\ 1 \times 10^0 \end{pmatrix} \quad \text{Normierte Elementwerte}$$

Entnormierte Elementwerte:

$$R' := 1 \quad G' := 1 \quad \omega' := 1 \quad \omega_c := 2\pi f_c$$

**Elementwerte für erstes Element parallel:**

<b>R</b>	<b>L</b>	<b>C</b>
$i := 0, n + 1..n + 1$	$s := 2, 4..n$	$p := 1, 3..n$
$R_i := g_i \cdot \left(\frac{Z_0}{R'}\right)$	$L_s := g_s \left(\frac{Z_0}{R'}\right) \cdot \left(\frac{\omega'}{\omega_c}\right)$	$C_p := g_p \left(\frac{R'}{Z_0}\right) \cdot \left(\frac{\omega'}{\omega_c}\right)$
$R = \begin{pmatrix} 600 \times 10^0 \\ 0 \times 10^0 \\ 0 \times 10^0 \\ 0 \times 10^0 \\ 0 \times 10^0 \\ 0 \times 10^0 \\ 600 \times 10^0 \end{pmatrix} \Omega$	$L = \begin{pmatrix} 0 \times 10^0 \\ 0 \times 10^0 \\ 4.092 \times 10^{-3} \\ 0 \times 10^0 \\ 4.092 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \text{H}$	$C = \begin{pmatrix} 0 \times 10^0 \\ 9.506 \times 10^{-9} \\ 0 \times 10^0 \\ 16.371 \times 10^{-9} \\ 0 \times 10^0 \\ 9.506 \times 10^{-9} \end{pmatrix} \text{F}$
Abschluss-Widerstände	Serie-Elemente	Parallel-Elemente



**Bild 3-46:** Berechnung der Elementwerte und Schema nach Beispiel 3-18.

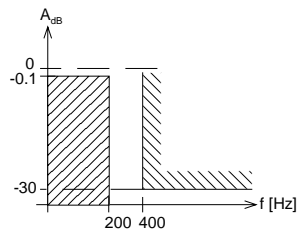
Die  $-3.01$ dB-Frequenz wird mit (3-53):

$$\epsilon := \sqrt{10^{0.1 \cdot A_{rdB}} - 1} \quad \epsilon = 152.62 \times 10^{-3}$$

$$f_{3dB} := f_c \cdot \cosh\left(\frac{\text{arccosh}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)}{n}\right) \quad f_{3dB} = 36.311 \times 10^3 \text{ Hz}$$

**Beispiel 3-19:** Dimensionierung aktives Tschebyscheff Tiefpassfilter

Man realisiere mit linearen und quadratischen Gliedern nach Sallen-Key ein ordnungsminimales Tiefpassfilter ohne Welligkeit im Sperrbereich, das die folgende Sperranforderung erfüllt:



**Bild 3-47:**  
Dämpfungsschablone für Sperranforderung in Beispiel 3-19.

**Lösung:**

Die ordnungsminimale Lösung ist ein Tschebyscheff-Tiefpass mit einer Welligkeit von 0.1dB. Die notwendige Ordnung wird mit Gl. (3-52) bestimmt. Damit werden die normierten Polfrequenzen und Polgüten aus der Tabelle gelesen oder mit Gl. (3-51), (3-28),(3-29) berechnet. Dies bildet die Grundlage zum Einsetzen in die Dimensionierungsgleichungen für die Teilfilter.

**Vorgaben:**  $f_C := 200 \cdot 10^0$  [Hz]       $A_r := 0.1$  [dB]  
 $f_H := 500 \cdot 10^0$  [Hz]       $A_H := 30$  [dB]

Berechnungen:

$\omega_C := f_C \cdot 2\pi$        $\omega_H := f_H \cdot 2\pi$        $\epsilon := \sqrt{10^{0.1A_r} - 1}$

**Bestimmung der minimal notwendigen Filterordnung n:**

$$n := \frac{\operatorname{arcosh} \left( \sqrt{\frac{\frac{A_H}{10^{10} - 1}}{\frac{A_r}{10^{10} - 1}}} \right)}{\operatorname{arcosh} \left( \frac{f_H}{f_C} \right)}$$

n = 3.846  
n := ceil(n)      n = 4

$m := 0, 1, \dots, \operatorname{trunc} \left( \frac{n}{2} \right) - 1$       Indizes der Teilfilter (konjugiert komplexe Pole)

**Bestimmung der normierten Pole:**       $j := \sqrt{-1}$        $\epsilon = 0.153$

$$S_{PT_m} := -\sin \left( \frac{1 + 2 \cdot m}{2 \cdot n} \pi \right) \cdot \sinh \left( \frac{1}{n} \cdot \operatorname{arsinh} \left( \frac{1}{\epsilon} \right) \right) + j \cdot \cos \left( \frac{1 + 2 \cdot m}{2 \cdot n} \pi \right) \cdot \cosh \left( \frac{1}{n} \cdot \operatorname{arsinh} \left( \frac{1}{\epsilon} \right) \right)$$

**Polgüten und Polfrequenzen für quadratische Teilfilter:**

$\Omega_{PT}(m) := |S_{PT_m}|$

$Q_{PT}(m) := \frac{-\Omega_{PT}(m)}{2 \operatorname{Re}(S_{PT_m})}$

m =	$Q_{PT}(m) =$	$\Omega_{PT}(m) =$
0	2.183	1.153
1	0.619	0.789

Die Dimensionierung der beiden quadratischen Teilfilter muss die Anfangsdämpfung der geradzahigen Filterordnung berücksichtigen. Dies erfolgt durch Einstellen der DC-Verstärkung mit einem Spannungsteiler, der den Widerstand  $R_{1B}$  der zweiten Stufe aufteilt.

Grunddämpfung des Filters

$$A_0 := \text{wenn}(\text{mod}(n, 2) = 1, 1, 10^{-0.05 \cdot A_r}) \quad A_0 = 0.989$$

Dimensionierung SK-Tiefpass 4.Ordnung (C gegeben, R gesucht).  
Realisation mit zwei kaskadierten Teilfiltern 2. Ordnung :

**Vorgaben 1. Teilfilter :**

$$\begin{aligned} Q_P &:= Q_{PT}(1) & \omega_T &:= 1 \cdot 10^6 \text{ [rad/s]} & f_C &= 200 \text{ [Hz]} \\ \Omega_P &:= \Omega_{PT}(1) & C_4 &:= 100 \cdot 10^{-9} \text{ [F]} & C_2 &:= 220 \cdot 10^{-9} \text{ [F]} \end{aligned}$$

$$\text{Bedingung: } C_{2\text{min}} := 4Q_P^2 \cdot C_4 \quad C_{2\text{min}} = 1.532 \times 10^{-7} \text{ [F]}$$

$$\omega_C := 2 \cdot \pi \cdot f_C \quad \omega_P := \Omega_P \cdot \omega_C \quad \omega_P = 991.808$$

$$R_1 := \frac{C_2 + \sqrt{C_2^2 - 4Q_P^2 \cdot C_2 \cdot C_4}}{2 \cdot C_2 \cdot C_4 \cdot \Omega_P \cdot Q_P \cdot \omega_C} \quad R_3 := \frac{1}{R_1 \cdot C_2 \cdot C_4 \cdot \Omega_P^2 \cdot \omega_C^2}$$

Resultate:	$R_{1A} := R_1$	$R_{1A} = 1.264 \times 10^4 \text{ } [\Omega]$
	$R_{3A} := R_3$	$R_{3A} = 3.657 \times 10^3 \text{ } [\Omega]$
	$C_{2A} := C_2$	$C_{2A} = 2.2 \times 10^{-7} \text{ [F]}$
	$C_{4A} := C_4$	$C_{4A} = 1 \times 10^{-7} \text{ [F]}$

**Vorgaben 2. Teilfilter:**

$$\begin{aligned} Q_P &:= Q_{PT}(0) & \omega_T &:= 1 \cdot 10^6 \text{ [rad/s]} & f_C &= 200 \text{ [Hz]} \\ \Omega_P &:= \Omega_{PT}(0) & C_4 &:= 10 \cdot 10^{-9} \text{ [F]} & C_2 &:= 220 \cdot 10^{-9} \text{ [F]} \end{aligned}$$

$$\text{Bedingung: } C_{2\text{min}} := 4Q_P^2 \cdot C_4 \quad C_{2\text{min}} = 1.906 \times 10^{-7} \text{ [F]}$$

$$\omega_C := 2 \cdot \pi \cdot f_C \quad \omega_P := \Omega_P \cdot \omega_C$$

$$R_1 := \frac{C_2 + \sqrt{C_2^2 - 4Q_P^2 \cdot C_2 \cdot C_4}}{2 \cdot C_2 \cdot C_4 \cdot \Omega_P \cdot Q_P \cdot \omega_C} \quad R_3 := \frac{1}{R_1 \cdot C_2 \cdot C_4 \cdot \Omega_P^2 \cdot \omega_C^2}$$

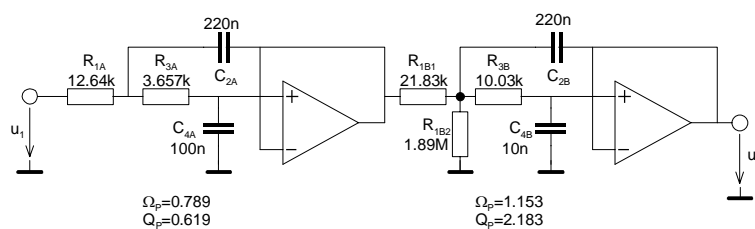
Resultate:	$R_{1B} := R_1$	$R_{1B} = 2.158 \times 10^4 \text{ } [\Omega]$
	$R_{3B} := R_3$	$R_{3B} = 1.003 \times 10^4 \text{ } [\Omega]$
	$C_{2B} := C_2$	$C_{2B} = 2.2 \times 10^{-7} \text{ [F]}$
	$C_{4B} := C_4$	$C_{4B} = 1 \times 10^{-8} \text{ [F]}$

Einstellen der DC-Verstärkung über einen Spannungsteiler indem  $R_{1B}$  aufgeteilt wird:

$$R_{1B2} := \frac{R_{1B}}{1 - A_0} \quad R_{1B2} = 1.885 \times 10^6 \text{ } [\Omega]$$

$$R_{1B1} := \frac{R_{1B2}}{A_0} - R_{1B2} \quad R_{1B1} = 2.183 \times 10^4 \text{ } [\Omega]$$

Dies ergibt das Detailschema der gesamten Filterschaltung:



Der Amplitudengang der gesamten Schaltung und der einzelnen Teilfilter werden mit exakten Werten:

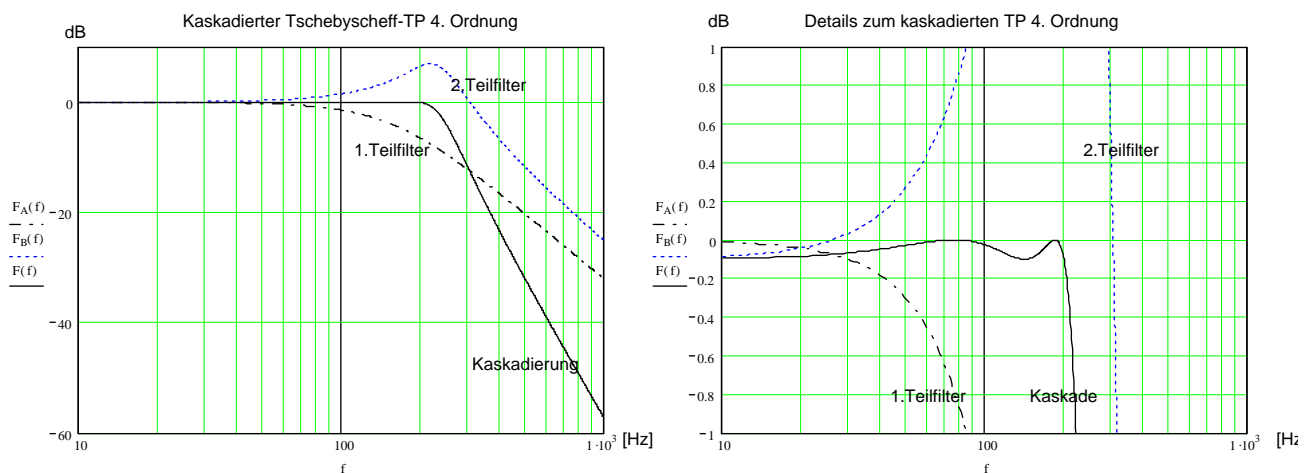


Bild 3-48: Berechneter Amplitudengang des Filters nach Beispiel 3-19.

### 3.8 Tiefpass-Hochpass Transformation

Die Realisation eines Hochpassfilters erfolgt über TP-HP Transformation des normierten Tiefpassfilters.

Bei der TP-HP Transformation werden alle Frequenzen reziprok betrachtet, d.h. es erfolgt eine Spiegelung bei  $\Omega_c=1$ . Die Dämpfungen bleiben unberührt:

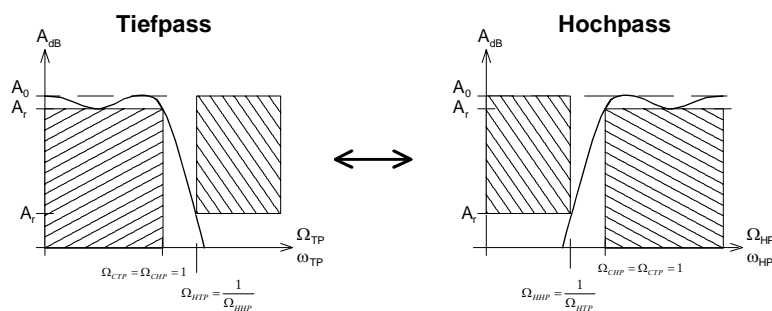


Bild 3-49: Tiefpass-Hochpass Transformation durch Spiegelung bei  $\Omega_c=1$ .

Formal gilt für die Tiefpass-Hochpass Transformation:

$$S_{PH} = \frac{1}{S_{PT}}$$

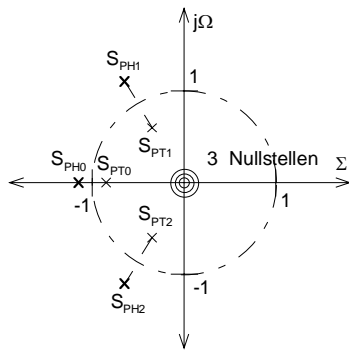
$$\Omega_{HP} = \frac{1}{\Omega_{TP}} \quad Q_{PH} = Q_{PT}$$

$$\omega_{CTP} = \omega_{CHP}$$

$$\omega_{TP} = \frac{\omega_{CTP} \omega_{CHP}}{\omega_{HP}} = \frac{\omega_{CHP}^2}{\omega_{HP}}$$

### Tiefpass-Hochpass Transformation (3-56)

Durch die Transformation werden dem PN-Diagramm im Ursprung  $n$  Nullstellen zugefügt, wobei  $n$  die Ordnung des Filters ist. Die grafische Interpretation der Transformation am Beispiel eines Hochpass 3. Ordnung:



**Bild 3-50:** PN-Diagramm einer Tiefpass-Hochpass Transformation eines Filters 3. Ordnung. Die Pole des Normtiefpass werden durch Reziprokbildung ausserhalb des Kreises verschoben und es entstehen drei Nullstellen im Ursprung

Die Nullstellen in der Übertragungsfunktion des Hochpassfilters werden normalerweise nicht ausdrücklich erwähnt, da sie im Ursprung liegen.

Die Elemente des passiven Hochpass werden aus dem normierten Tiefpasselement mit folgender Zuordnung bestimmt:

TP	HP (normiert)	HP (entnormiert)
	 $L_{HP} = \frac{1}{C_{TP}}$	$L_{HP} = \frac{FSF^2}{C_{TP}}$
	 $C_{HP} = \frac{1}{L_{TP}}$	$C_{HP} = \frac{FSF^2}{L_{TP}}$
mit: $FSF = \frac{1}{2\pi} \frac{Hz}{f_c}$		

(3-57)

(3-58)

Die Komponenten für ein passives Hochpassfilter können direkt aus den normierten Elementwerten  $g_k$  berechnet werden:

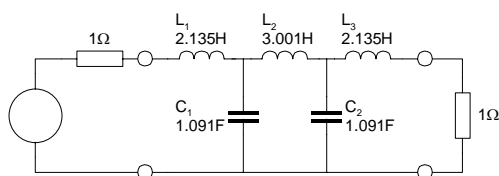
	$R_{kHP} = g_k \cdot R_0$
	$C_{kHP} = \frac{1}{\omega_{CTP} \omega_{CHP} L_{kHP}} = \frac{1}{\omega_{CHP} R_0 g_k}$
	$L_{kHP} = \frac{1}{\omega_{CTP} \omega_{CHP} C_{kHP}} = \frac{R_0}{\omega_{CHP} g_k}$

(3-59)

(3-60)

### Beispiel 3-20: Tiefpass-Hochpass Transformation

Man bestimme die Werte des zugehörigen Hochpassfilters aus dem normierten Tiefpass in Bild 3-51.



**Bild 3-51:** Normiertes Tiefpassfilter für TP-HP Transformation in Beispiel 3-20. (Tschebyscheff,  $A_r=1dB$ )

### Lösung:

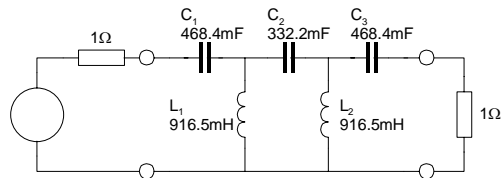
Nach (3-57),(3-58) gehen alle Kapazitäten in Induktivitäten über, ebenso alle Induktivitäten in Kapazitäten. Die Schaltung und Berechnung wird daher:



$$L_{1HP} = \frac{1}{C_{1TP}} = \frac{1}{1.091F} = 916.6mH \quad L_{2HP} = \frac{1}{C_{2TP}} = \frac{1}{1.091F} = 468.4mF$$

$$C_{1HP} = \frac{1}{L_{1TP}} = \frac{1}{2.1305H} = 468.4mF \quad C_{1HP} = \frac{1}{L_{1TP}} = \frac{1}{3.001H} = 333.2mF$$

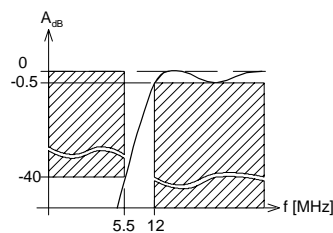
$$C_{3HP} = \frac{1}{L_{3TP}} = \frac{1}{2.1305F} = 468.4mF$$



**Bild 3-52:** Normierter Hochpass nach TP-HP Transformation in Beispiel 3-20. (Tschebyscheff,  $A_r=1dB$ )

**Beispiel 3-21:** Dimensionierung passiver Hochpass

Man dimensioniere das passive Filter für  $Z_0=Z_L=100\Omega$ , das den Anforderungen nach Bild 3-53 genügt. Die Eingangsimpedanz soll im Sperrbereich ansteigend sein.



**Bild 3-53:** Durchlass- und Sperranforderungen für das passive Filter in Beispiel 3-21.

**Lösung:**

Da Welligkeit im Durchlassbereich zugelassen ist, wird man ein Tschebyscheff-Filter realisieren. Die minimal notwendige Filterordnung wird über die normierte Sperrfrequenz des zugehörigen Referenz-Tiefpassfilters nach (3-52) bestimmt:

**Vorgaben:**

$f_C := 12MHz$                        $f_H := 5.5MHz$   
 $A_{rdB} := 0.5$                          $A_{HdB} := 40$

**Berechnungen:**

$\Omega_{HHP} := \frac{f_H}{f_C}$                        $\Omega_{HHP} = 0.458$                       Normierte Sperrfrequenz Hochpass  
 $\Omega_{HTP} := \frac{1}{\Omega_{HHP}}$                        $\Omega_{HTP} = 2.182$                       Zugehörige normierte Sperrfrequenz Tiefpass

Bestimmung der Filterordnung:

$$n := \frac{\text{arcosh} \left( \sqrt{\frac{10^{\frac{A_{HdB}}{10}} - 1}{10^{\frac{A_{rdB}}{10}} - 1}} \right)}{\text{arcosh}(\Omega_{HTP})}$$

$n = 4.484$   
 $n := \text{ceil}(n)$                        $n = 5$

Die normierten Elementwerte  $g_k$  werden mit (3-54) und (3-55):

Normierte Elementwerte:

$k := 1..n$       Indizes der normierten inneren Elemente

$$m := \ln\left(\coth\left(\frac{A_{\text{dB}}}{40 \cdot \log(e)}\right)\right) \quad q := \sinh\left(\frac{m}{2n}\right) \quad a_k := \sin\left[\frac{(2k-1) \cdot \pi}{2n}\right] \quad b_k := q^2 + \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{n}\right)^2$$

$g_0 := 1$

$$g_1 := \frac{2a_1}{q}$$

$k := 2..n$

$$g_k := \frac{4 \cdot a_{k-1} \cdot a_k}{b_{k-1} \cdot g_{k-1}}$$

$$g_{n+1} := \begin{cases} 1 & \text{if } \text{mod}(n,2) = 1 \\ \coth\left(\frac{m}{4}\right)^2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.706 \\ 1.23 \\ 2.541 \\ 1.23 \\ 1.706 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Normierte Elementwerte}$$

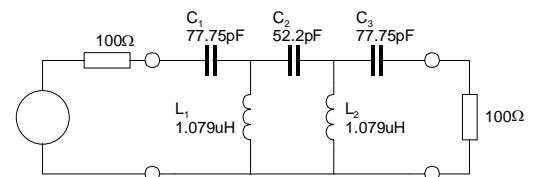
Da im Sperrbereich eine ansteigende Impedanz gefordert wird, ist das erste Element ein Serie-Element. Daher werden die entnormierten Elementwerte nach (3-59):

Entnormierte Elementwerte:

$R' := 1 \quad G' := 1 \quad \omega' := 1 \quad \omega_{\text{CHP}} := 2\pi f_C$

Elementwerte für erstes Element in Serie:

<p><b>R</b></p> <p><math>i := 0, n + 1..n + 1</math></p> $R_i := g_i \cdot \left(\frac{Z_0}{R'}\right)$ $R = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix} \Omega$ <p>Abschluss-Widerstände</p>	<p><b>L</b></p> <p><math>s := 2, 4..n</math></p> $L_s := \frac{Z_0}{\omega_{\text{CHP}} \cdot g_s}$ $L = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.079 \times 10^{-6} \\ 0 \\ 1.079 \times 10^{-6} \end{pmatrix} \text{H}$ <p>Serie-Elemente</p>	<p><b>C</b></p> <p><math>p := 1, 3..n</math></p> $C_p := \frac{1}{\omega_{\text{CHP}} \cdot g_p \cdot Z_0}$ $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 7.775 \times 10^{-11} \\ 0 \\ 5.22 \times 10^{-11} \\ 0 \\ 7.775 \times 10^{-11} \end{pmatrix} \text{F}$ <p>Parallel-Elemente</p>
---	--	---



**Bild 3-54:** Entnormierte Elementwerte und Schema des passiven Filters nach Beispiel 3-21.

**Beispiel 3-22:** Tiefpass-Hochpass Transformation

Wie lautet die Übertragungsfunktion eines normierten Tschebyscheff-Hochpass 3. Ordnung mit Welligkeit 1dB?

**Lösung:**

Man berechnet mit (3-51) oder liest aus der Tabelle die Pole:

**Vorgaben:**  $n := 3$   $A_r := 1$  [dB]  
 $m := 0, 1, \dots, n - 1$  Indizes der konjugiert komplexen Pole

**Bestimmung der Normtiefpass-Pole:**

$$\varepsilon := \sqrt{10^{0.1A_r} - 1} \quad \varepsilon = 0.509$$

$$S_{PT_m} := -\sin\left(\frac{1 + 2 \cdot m}{2 \cdot n} \pi\right) \cdot \sinh\left(\frac{1}{n} \cdot \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) + j \cdot \cos\left(\frac{1 + 2 \cdot m}{2 \cdot n} \pi\right) \cdot \cosh\left(\frac{1}{n} \cdot \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$$

$$S_{PT} = \begin{pmatrix} -0.247 + 0.966i \\ -0.494 \\ -0.247 - 0.966i \end{pmatrix} \quad \text{Pole des Normtiefpass}$$

**Tiefpass-Hochpass Transformation:**

$$S_{PH_m} := \frac{1}{S_{PT_m}}$$

$$S_{PH} = \begin{pmatrix} -0.249 - 0.972i \\ -2.024 \\ -0.249 + 0.972i \end{pmatrix} \quad \text{Pole des Normhochpass}$$

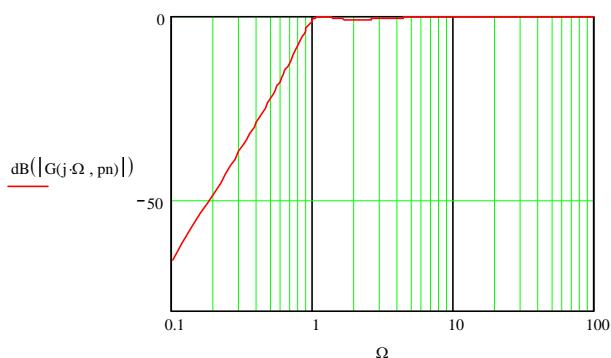
Dies ergibt formal die Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{s^3}{\left(1 + \frac{s}{-S_{PH_0}}\right) \left(1 + \frac{s}{-S_{PH_1}}\right) \left(1 + \frac{s}{-S_{PH_2}}\right)} = \frac{s^3}{\left(1 + \frac{s}{0.249 + 0.972j}\right) \left(1 + \frac{s}{2.024}\right) \left(1 + \frac{s}{0.249 - 0.972j}\right)}$$

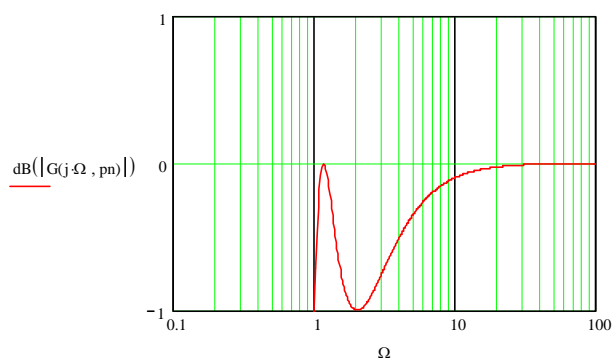
$$= \frac{s^3}{2.035 + 2.012s + 2.521s^2 + s^3}$$

Die grafische Darstellung zeigt den erwarteten Amplitudengang:

Amplitudengang Tschebyscheff Norm-Hochpass  
3. Ordnung,  $A_r=1$ dB



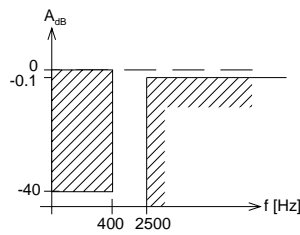
Details Amplitudengang Tschebyscheff Norm-Hochpass



**Bild 3-55:** Grafische Darstellung des Amplitudenganges für den normierten Tschebyscheff-Hochpass 3. Ordnung nach Beispiel 3-22.

**Beispiel 3-23:** Aktives Hochpassfilter (Tschebyscheff)

Man realisiere mit quadratischen Teilfiltern nach Sallen-Key folgende Sperranforderung:



**Bild 3-56:** Dämpfungsschablone für Dimensionierung in Beispiel 3-23.

**Lösung:**

Man wählt ein Tschebyscheff-Filter mit 0.1dB Welligkeit. Zuerst werden die normierten Frequenzen bestimmt und über die Hochpass-Tiefpass Transformation die Werte des zugehörigen normierten Referenztiefpass: Minimale Ordnung, Polfrequenzen und Polgüten. Diese Werte werden zur Bestimmung der Elementwerte für die Teilfilterschaltungen benutzt.

Mit MathCad werden die normierten Hochpass-Polfrequenzen und Polgüten:

Vorgaben:  $f_C := 2.5 \cdot 10^3$  [Hz]       $A_r := 0.1$  [dB]  
 $f_H := 400 \cdot 10^0$  [Hz]       $A_H := 40$  [dB]

Berechnungen:

$\omega_C := f_C \cdot 2\pi$        $\epsilon := \sqrt{10^{0.1A_r} - 1}$   
 $\Omega_{HTP} := \frac{f_C}{f_H}$       HP-TP Transformation der normierten Sperrfrequenz       $\Omega_{HTP} = 6.25$

Bestimmung der Filterordnung:

$$n := \frac{\text{arcosh} \left( \sqrt{\frac{A_H}{10^{10} - 1}} \right)}{\text{arcosh}(\Omega_{HTP})}$$

$$n = 2.849$$

$$n := \text{ceil}(n) \quad n = 3$$

$m := 0, 1, \dots, \text{trunc} \left( \frac{n-1}{2} \right)$       Index über die Anzahl quadratischer Teilfilter

Berechnung Tschebyscheff-Pole der Ordnung n:

$$S_{PT_m} := -\sin \left( \frac{1+2 \cdot m}{2 \cdot n} \pi \right) \cdot \sinh \left( \frac{1}{n} \cdot \text{arsinh} \left( \frac{1}{\epsilon} \right) \right) + j \cdot \cos \left( \frac{1+2 \cdot m}{2 \cdot n} \pi \right) \cdot \cosh \left( \frac{1}{n} \cdot \text{arsinh} \left( \frac{1}{\epsilon} \right) \right)$$

Polgüten und Polfrequenzen des Referenztiefpass:

$\Omega_{PT}(m) := |S_{PT_m}|$   
 $Q_{PT}(m) := \frac{-\Omega_{PT}(m)}{2 \text{Re}(S_{PT_m})}$

m =	$Q_{PT}(m) =$	$\Omega_{PT}(m) =$
0	1.34093	1.2999
1	0.5	0.96941

**Tiefpass-Hochpass Transformation**

Polgüten und normierte Polfrequenzen für quadratische Teilfilter des Hochpass:

$\Omega_{PH}(m) := \frac{1}{\Omega_{PT}(m)}$        $Q_{PH}(m) := Q_{PT}(m)$

m =	$Q_{PH}(m) =$	$\Omega_{PH}(m) =$
0	1.34093	0.76929
1	0.5	1.03156

**Enddämpfung**

$A_{INF} := \text{wenn}(\text{mod}(n,2) = 1, 1, 10^{-0.05A_r})$        $A_{INF} = 1$

Wir realisieren das Filter mit einem linearen und einem quadratischen Glied. Wegen der besseren Aussteuerbarkeit werden die Teilfilter in aufsteigender Güte angeordnet. Die Elementwerte werden mit den Dimensionierungsformeln nach Anhang.

**Vorgaben 2. Teilfilter (quadratisch) :**

$$Q_p := Q_{PH}(0) \quad \Omega_p := \Omega_{PH}(0) \quad f_c = 2.5 \times 10^3 \quad [\text{Hz}]$$

$$C := 10 \cdot 10^{-9} \quad [\text{F}] \quad (\text{Wahl}) \quad R_6 := 10 \cdot 10^3 \quad [\Omega]$$

Elementwerte:

$$\omega_c := 2 \cdot \pi \cdot f_c$$

$$C_1 := C \quad C_3 := C$$

$$R_2 := \frac{1}{2 \cdot \Omega_p \cdot Q_p \cdot C \cdot \omega_c} \quad R_2 = 3.086 \times 10^3 \quad [\Omega]$$

$$R_4 := \frac{2Q_p}{\Omega_p \cdot C \cdot \omega_c} \quad R_4 = 2.219 \times 10^4 \quad [\Omega]$$

**Vorgaben 2. Teilfilter (linear) :**

$$\Omega_{PH} := \Omega_{PH}(1) \quad f_c = 2.5 \times 10^3 \quad [\text{Hz}]$$

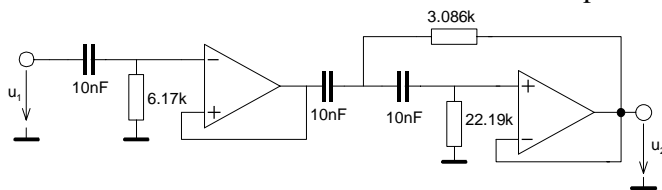
$$C := 10 \cdot 10^{-9} \quad [\text{F}] \quad (\text{Wahl})$$

Elementwerte:

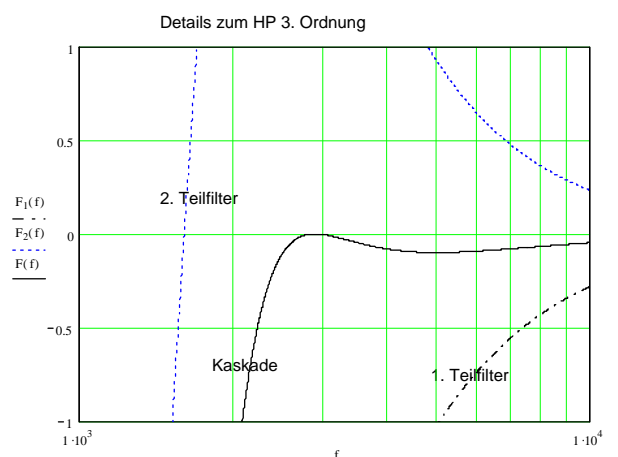
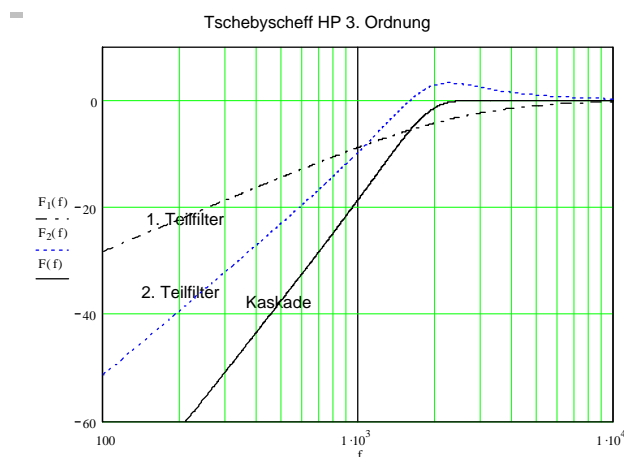
$$\omega_c := 2 \cdot \pi \cdot f_c$$

$$R := \frac{1}{\Omega_{PH} \cdot C \cdot \omega_c} \quad R = 6.171 \times 10^3 \quad [\Omega]$$

Das Gesamtschema und der rechnerische Amplitudengang werden:



**Bild 3-57:** Detailschema der Dimensionierung des Tschebyscheff-Hochpass 3. Ordnung nach Beispiel 3-23.



Kontrolle der Sperranforderungen:

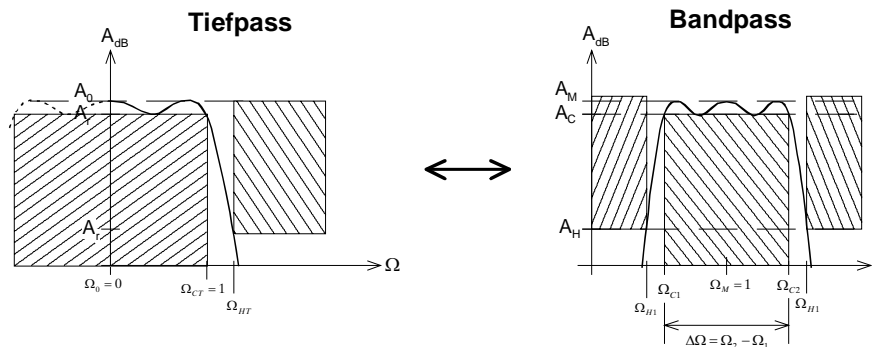
$$F(f_c) = -0.1 \quad [\text{dB}] \quad \text{Bei Grenzfrequenz}$$

$$F(f_H) = -43.298 \quad [\text{dB}] \quad \text{Bei Sperrfrequenz}$$

**Bild 3-58:** Berechneter Amplitudengang gesamthaft und der Teilfilter nach Beispiel 3-23 und Kontrolle der Dämpfung bei Grenz- und Sperrfrequenz  $f_c$   $f_H$

### 3.9 Tiefpass-Bandpass Transformation

Diese Transformation überführt ein Tiefpass der Ordnung  $n$  in ein Bandpass der Ordnung  $2n$  mit einer definierbaren Bandbreite  $B$ . Sie ist vor allem zur Realisation von Bandpässen kleinerer Bandbreiten ( $\Delta\Omega < 1$ ) geeignet. Es erfolgt eine Spiegelung bei  $\Omega_0 = 0$  und eine Verschiebung zur Bandmittenfrequenz  $\Omega_M = 1$ :



**Bild 3-59:** Tiefpass-Bandpass Transformation durch Spiegelung bei  $\Omega_0 = 0$  und Verschiebung zur Bandmittenfrequenz  $\Omega_M = 1$ .

Die Steilheit der Bandpassflanken entsprechen der Steilheit des Referenz Tiefpass. Die Bandbreite  $\Delta\Omega$  ist frei wählbar.

$$S_{PT} = \frac{1}{\Delta\Omega} \left( S_{PB} + \frac{1}{S_{PB}} \right) = \frac{\omega_M}{\omega_{C2} - \omega_{C1}} \left( \frac{S_{PB}}{\omega_M} + \frac{\omega_M}{S_{PB}} \right) = D \left( \frac{1}{\Omega_{PB}} - \Omega_{PB} \right) \quad \omega_m = \sqrt{\omega_{C1} \cdot \omega_{C2}} \quad (3-61)$$

$$S_{PB} = \frac{S_{PT} \pm \sqrt{S_{PT}^2 - 4D^2}}{2D}$$

$$\Delta\Omega = \frac{\omega_{C2} - \omega_{C1}}{\omega_m} = \frac{f_{C2} - f_{C1}}{f_m} = \Omega_2 - \Omega_1 \quad \Omega_1 = \frac{1}{\Omega_2}$$

$$D = \frac{1}{\Delta\Omega}$$

$$A_K = \Delta\Omega \cdot \Omega_{TP} \cdot Q_{PB}^n \sqrt{A_M}$$

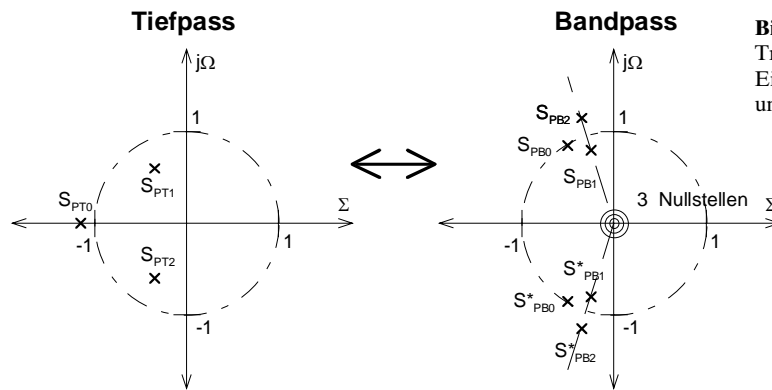
### Tiefpass-Bandpass Transformation

Die Güte ist beim Bandpass per Definition immer auf  $-3.01\text{dB}$  bezogen. Der Faktor  $D$  ist als Kehrwert der normierten Bandbreite nur gleich der Bandpass-Güte  $Q$ , wenn der Referenz Tiefpass ebenfalls bei der Grenzfrequenz  $-3.01\text{dB}$  hat (z.B. Bessel, Butterworth)

Der Stufenkorrekturfaktor  $A_K$  bewirkt, dass bei  $\Omega = 1$  gesamthaft eine Dämpfung von  $A_M$  erreicht wird.  $A_K$  ist daher in jedem Teilfilter zu berücksichtigen, ist aber nur bei aktiven Filtern relevant.

Die Transformation fügt dem PN-Diagramm im Ursprung  $n$  Nullstellen zu, wobei  $n$  die Ordnung des Filters ist. Ein reeller TP-Pol erzeugt ein konjugiert komplexes Polpaar mit der Polfrequenz  $\Omega_{PB} = 1$ . Ein konjugiert komplexer TP-Pol erzeugt zwei konjugiert komplexe Polpaare mit gleichen Polgüten. Die Polfrequenzen sind zueinander reziprok  $\Omega_{PB1} = \frac{1}{\Omega_{PB2}}$  und haben so eine geometrische Symmetrie zu  $\Omega_M = 1$ .

Die grafische Interpretation der Transformation am Beispiel eines Bandpass 6. Ordnung:



**Bild 3-60:** PN-Diagramm einer Tiefpass-Bandpass Transformation eines Filters 3. Ordnung. Ein TP-Pol erzeugt jeweils ein konjugiert komplexes Polpaar und es entstehen drei Nullstellen im Ursprung

Beim normierten passiven Filter werden die Induktivitäten und Kapazitäten in Schwingkreise überführt:

TP	BP (normiert)	
		$R_{BP} = R_{TP}$
		$C_{BP} = D \cdot C_{TP}$ $L_{BP} = \frac{1}{C_{BP}}$
		$L_{BP} = D \cdot L_{TP}$ $C_{BP} = \frac{1}{L_{BP}}$
		$L_{BP+} = D \cdot L_{TP} (1 + \Omega_{p-}^2)$ $L_{BP-} = D \cdot L_{TP} (1 + \Omega_{p+}^2)$ $C_{BP+} = \frac{1}{L_{BP-}}$ $C_{BP-} = \frac{1}{L_{BP+}}$
		$C_{BP+} = D \cdot C_{TP} (1 + \Omega_{p-}^2)$ $C_{BP-} = D \cdot C_{TP} (1 + \Omega_{p+}^2)$ $L_{BP+} = \frac{1}{C_{BP-}}$ $L_{BP-} = \frac{1}{C_{BP+}}$
wobei:		
$\Omega_p = \frac{1}{\sqrt{L_{TP} \cdot C_{TP}}}$		$\Omega_{p+} = \sqrt{\left(\frac{\Omega_p}{2D}\right)^2 + 1} + \frac{\Omega_p}{2D}$ $\Omega_{p-} = \sqrt{\left(\frac{\Omega_p}{2D}\right)^2 + 1} - \frac{\Omega_p}{2D} = \frac{1}{\Omega_{p+}}$

(3-62)

Wird ein passiver Bandpass direkt mit den normierten Tiefpass-Elementwerten  $g_k$  synthetisiert, werden die Elementwerte für ein Filter ohne Welligkeit im Sperrbereich:

TP	BP
	$R_{kBP} = g_k \cdot R_0$
	$C_{kBP} = \frac{\Delta\Omega}{\omega_m g_k R_0}$ $L_{kBP} = \frac{R_0 g_k}{\omega_m \Delta\Omega}$
	$C_{kBP} = \frac{g_k}{\omega_m R_0 \Delta\Omega}$ $L_{kBP} = \frac{\Delta\Omega R_0}{\omega_m g_k}$
	mit: $\Delta\Omega = \frac{B}{f_M} = \frac{1}{D}$

(3-63)

### Beispiel 3-24: Tiefpass-Bandpass Transformation

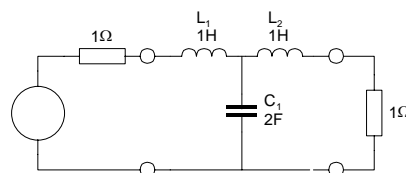
Das normierte Tiefpassfilter nach Bild 3-61 ist ein Bandpassfilter mit

$$Z_0 = Z_L = 100\Omega$$

$$f_m = 1\text{MHz}$$

$$B = 100\text{kHz}$$

zu transformieren



**Bild 3-61:** Normierter Tiefpass für TP-BP Transformation in Beispiel 3-24. (Butterworth, 3. Ordnung)

### Lösung:

Zuerst bestimmt man die normierte Bandbreite  $\Delta\Omega$ . Anschliessend mit den Transformationsgleichungen den zugehörigen normierten Bandpass. Zum Schluss erfolgt eine Frequenz- und Impedanztransformation.

#### Vorgaben:

$$Z := 100\Omega \quad n := 3 \quad L_{TP} := 1\text{H} \quad C_{TP} := 2\text{F}$$

$$f_m := 1\text{MHz} \quad B := 100\text{kHz}$$

#### Berechnungen:

$$\Delta\Omega := \frac{B}{f_m} \quad \Delta\Omega = 0.1$$

$$D := \frac{1}{\Delta\Omega}$$

Normierte Bandpasselementwerte:

$$L_{BP1} := D \cdot L_{TP} \quad L_{BP1} = 10\text{H}$$

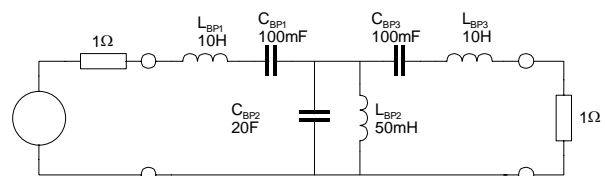
$$C_{BP1} := \frac{1}{D} \cdot L_{TP} \cdot \frac{\text{F}}{\text{H}} \quad C_{BP1} = 0.1\text{F}$$

$$C_{BP2} := D \cdot C_{TP} \quad C_{BP2} = 20\text{F}$$

$$L_{BP2} := \frac{1}{C_{BP2}} \cdot \text{F} \cdot \text{H} \quad L_{BP2} = 0.05\text{H}$$

$$L_{BP3} := D \cdot L_{TP} \quad L_{BP3} = 10\text{H}$$

$$C_{BP3} := \frac{1}{D} \cdot L_{TP} \cdot \frac{\text{F}}{\text{H}} \quad C_{BP3} = 0.1\text{F}$$



**Bild 3-62:** Erster Schritt in der TP-BP Transformation in Beispiel 3-24: Bestimmung des normierten Bandpassfilters.

Nun kann in bekannter Weise die Entnormierung erfolgen:



Entnormierung:

$$\text{ISF} := \frac{Z}{\Omega} \quad * \quad \text{FSF} := \frac{1}{2\pi} \frac{\text{Hz}}{f_m} \quad \text{Skalierungsfaktoren}$$

$$C'_{BP1} := \frac{C_{BP1}}{\text{ISF}} \cdot \text{FSF} \quad C'_{BP1} = 1.592 \times 10^{-10} \text{ F}$$

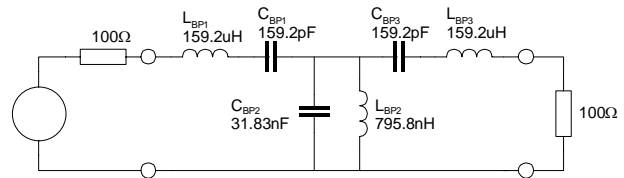
$$L'_{BP1} := L_{BP1} \cdot \text{ISF} \cdot \text{FSF} \quad L'_{BP1} = 1.592 \times 10^{-4} \text{ H}$$

$$C'_{BP2} := \frac{C_{BP2}}{\text{ISF}} \cdot \text{FSF} \quad C'_{BP2} = 3.183 \times 10^{-8} \text{ F}$$

$$L'_{BP2} := L_{BP2} \cdot \text{ISF} \cdot \text{FSF} \quad L'_{BP2} = 7.958 \times 10^{-7} \text{ H}$$

$$C'_{BP3} := \frac{C_{BP3}}{\text{ISF}} \cdot \text{FSF} \quad C'_{BP3} = 1.592 \times 10^{-10} \text{ F}$$

$$L'_{BP3} := L_{BP3} \cdot \text{ISF} \cdot \text{FSF} \quad L'_{BP3} = 1.592 \times 10^{-4} \text{ H}$$



**Bild 3-63:** Fertig transformierte Bandpasschaltung nach Beispiel 3-24.

### Begründung TP-BP Transformation

Die Herleitung, bzw. der Beweis der Transformationsvorschrift ist etwas umfangreich und brächte hier wenig für die weiteren Anwendungen. Dem interessierten Leser sei hierzu auf [CHE95], S.2198 und [DAN74], S. 88 verwiesen.

Die Bestimmung der BP-Pole aus dem Referenztiefpass erfolgt durch Lösen der quadratischen Gleichung:

$$S_{PT} = \frac{1}{\Delta\Omega} \left( S_{PB} + \frac{1}{S_{PB}} \right) = D \left( S_{PB} + \frac{1}{S_{PB}} \right) \quad \rightarrow DS_{PB}^2 - S_{PT}S_{PB} + D = 0 \quad (3-64)$$

$$S_{PB} = \frac{S_{PT}}{2D} \pm \frac{\sqrt{S_{PT}^2 - 4D^2}}{2D}$$

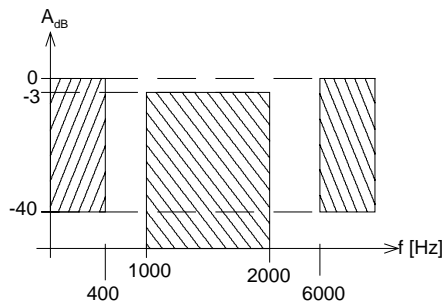
Für gegebene Kreisfrequenzen wird die Transformation durch Ersetzen von S mit  $j\Omega$ :

$$j\Omega_{PT} = D \left( j\Omega_{PB} + \frac{1}{j\Omega_{PB}} \right) \quad \rightarrow \Omega_{PT} = D \left( \frac{1}{\Omega_{PB}} - \Omega_{PB} \right) = D \left( \frac{\omega_M}{\omega_{PB}} - \frac{\omega_{PB}}{\omega_M} \right) \quad (3-65)$$

$$\Omega_{PB} = \frac{\Omega_{PT}}{2D} \pm \frac{\sqrt{\Omega_{PT}^2 + 4D^2}}{2D}$$

**Beispiel 3-25:** Minimale Filterordnung für Bandpass

Welche minimale Filterordnung muss ein Butterworth-Bandpass haben um der folgenden Sperranforderung zu genügen?



**Bild 3-64:** Dämpfungsschablone für Bestimmung der Filterordnung in Beispiel 3-25.

**Lösung:**

Man bestimmt zuerst das kleinere  $\Omega_{CTP}$  des zugehörigen Referenztiefpass. Daraus berechnet man die Tiefpass-Ordnung  $n_{TP}$ . Die Bandpass-Ordnung ist dann  $2n_{TP}$ .

- **Vorgaben:**  $f_{C1} := 1000$  [Hz]     $f_{C2} := 2000$  [Hz]  
 $f_{H1} := 400$  [Hz]     $f_{H2} := 6000$  [Hz]     $A_H := 40$  [dB]

**Berechnungen:**

$$f_M := \sqrt{f_{C1} \cdot f_{C2}} \quad f_M = 1.414 \times 10^3 \text{ [Hz]}$$

$$\Omega_{C1} := \frac{f_{C1}}{f_M} \quad \Omega_{C1} = 0.707$$

$$\Omega_{C2} := \frac{f_{C2}}{f_M} \quad \Omega_{C2} = 1.414$$

$$\Omega_{H2} := \frac{f_{H2}}{f_M} \quad \Omega_{H2} = 4.243$$

$$\Omega_{H1} := \frac{f_{H1}}{f_M} \quad \Omega_{H1} = 0.283$$

**BP-TP Transformation:**

$$D := \frac{1}{\Omega_{C2} - \Omega_{C1}} \quad D = 1.414$$

$$\Omega_{CTP} := D \cdot \left( \frac{1}{\Omega_{C1}} - \Omega_{C1} \right) \quad \Omega_{CTP} = 1 \quad \text{(Die Grenzfrequenzen werden auf } \Omega=1 \text{ transformiert)}$$

$$\Omega_{HTP1} := D \cdot \left( \frac{1}{\Omega_{H1}} - \Omega_{H1} \right) \quad \Omega_{HTP1} = 4.6$$

$$\Omega_{HTP2} := \left| D \cdot \left( \frac{1}{\Omega_{H2}} - \Omega_{H2} \right) \right| \quad \Omega_{HTP2} = 5.667$$

$$\Omega_{HTP} := \text{wenn}(\Omega_{HTP1} < \Omega_{HTP2}, \Omega_{HTP1}, \Omega_{HTP2}) \quad \Omega_{HTP} = 4.6 \quad \text{Die härtere Sperrforderung gilt!}$$

**Ordnung des Referenztiefpass:**

$$n_{TP} := \frac{\ln(10^{0.1 \cdot A_H} - 1)}{2 \ln(\Omega_{HTP})} \quad n_{TP} = 3.018$$

$$n_{TP} := \text{ceil}(n_{TP}) \quad n_{TP} = 4 \quad \text{(Ordnung Referenz-TP)}$$

**Ordnung des Bandpass:**

$$n_{BP} := 2 \cdot n_{TP} \quad n_{BP} = 8 \quad \text{(Ordnung Bandpass)}$$

**Beispiel 3-26:** Berechnung normierte Bandpass Pole

Man bestimme die normierten Bandpass-Pole für ein Butterworth-Bandpass 8. Ordnung mit  $\Delta\Omega=0.6$ . Die Bandpass-Pole und die Pole des Referenztiefpass sind im PN-Diagramm grafisch darzustellen.

**Vorgaben:**

$\Delta\Omega := 0.6$     normierte Bandbreite  
 $n = 4$     Ordnung des Referenz Tiefpass

$$S_{TP} = \begin{pmatrix} -0.383 + 0.924j \\ -0.924 + 0.383j \\ -0.924 - 0.383j \\ -0.383 - 0.924j \end{pmatrix}$$

Normierte Polstellen  
Butterworth Tiefpass

**Transformationsvorschriften:**

$\Omega_1 := \frac{\sqrt{\Delta\Omega^2 + 4}}{2} - \frac{\Delta\Omega}{2}$      $\Omega_1 = 0.744$

$\Omega_2 := \frac{\sqrt{\Delta\Omega^2 + 4}}{2} + \frac{\Delta\Omega}{2}$      $\Omega_2 = 1.344$

$D := \frac{1}{\Omega_2 - \Omega_1}$      $D = 1.667$

$S_{PBP1}(S_{TP}, m) := \frac{S_{TP_m}}{2D} + \frac{\sqrt{(S_{TP_m})^2 - 4D^2}}{2D}$

$S_{PBP2}(S_{TP}, m) := \frac{S_{TP_m}}{2D} - \frac{\sqrt{(S_{TP_m})^2 - 4D^2}}{2D}$

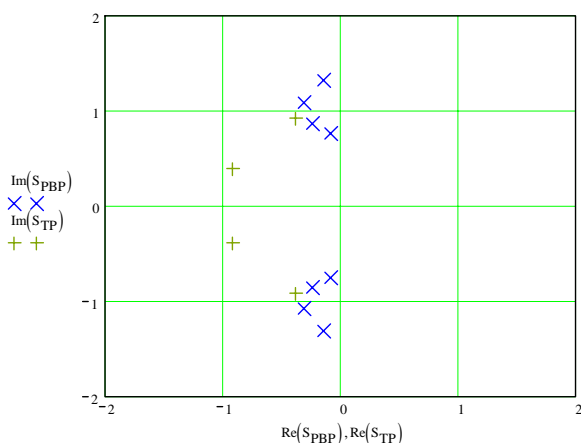
Konjugiert komplexe  
normierte Bandpass Pole

$m := 0..2 \cdot n - 1$

$S_{PBP_{2k}} := S_{PBP1}(S_{TP}, k)$      $S_{PBP_{2k+1}} := S_{PBP2}(S_{TP}, k)$      $S_{PBP} = \begin{pmatrix} -0.084 - 0.755j \\ -0.146 + 1.309j \\ -0.244 - 0.853j \\ -0.31 + 1.083j \\ -0.244 + 0.853j \\ -0.31 - 1.083j \\ -0.084 + 0.755j \\ -0.146 - 1.309j \end{pmatrix}$

Normierte Polstellen  
Butterworth Bandpass

Lage der Polstellen Butterworth Tiefpass 4. Ordnung-Bandpass 8. Ordnung

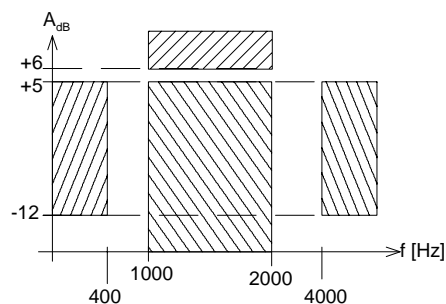


**Bild 3-65:** PN-Diagramm der TP-BP Transformation für einen Tiefpass 3. Ordnung nach Beispiel 3-26.

Legende:  
+ Tiefpass-Pol  
x Bandpass-Pol

**Beispiel 3-27:** Dimensionierung aktiver Tschebyscheff-Bandpass

Folgende Sperranforderung ist mit MGK-Teilfiltern zu realisieren. Man beachte die geforderte Mittenverstärkung von +6dB:



**Bild 3-66:** Dämpfungsschablone für Dimensionierung in Beispiel 3-27.

**Vorgaben:**  $f_{C1} := 1000$  [Hz]     $f_{C2} := 2000$  [Hz]     $A_r := 1$  [dB]    Welligkeit  
 $f_{H1} := 400$  [Hz]     $f_{H2} := 4000$  [Hz]     $A_H := 12$  [dB]    Min. Sperrdämpfung  
 $A_m := 6$  [dB]    Verstärkung bei Mittenfrequenz

**Berechnungen:**

$$f_M := \sqrt{f_{C1} \cdot f_{C2}} \quad f_M = 1.414 \times 10^3$$

$$\Omega_{C1} := \frac{f_{C1}}{f_M} \quad \Omega_{C2} := \frac{f_{C2}}{f_M} \quad \Omega_{H2} := \frac{f_{H2}}{f_M} \quad \Omega_{H1} := \frac{f_{H1}}{f_M}$$

$$\Omega_{C1} = 0.707 \quad \Omega_{C2} = 1.414 \quad \Omega_{H2} = 2.828 \quad \Omega_{H1} = 0.283$$

**BP-TP-Transformation, Referenz-Tiefpass:**

$$D := \frac{1}{\Omega_{C2} - \Omega_{C1}} \quad D = 1.414$$

$$\Omega_{CTP} := D \cdot \left( \frac{1}{\Omega_{C1}} - \Omega_{C1} \right) \quad \Omega_{HTP1} := D \cdot \left( \frac{1}{\Omega_{H1}} - \Omega_{H1} \right) \quad \Omega_{HTP2} := \left| D \cdot \left( \frac{1}{\Omega_{H2}} - \Omega_{H2} \right) \right|$$

$$\Omega_{CTP} = 1 \quad \Omega_{HTP1} = 4.6 \quad \Omega_{HTP2} = 3.5$$

$$\Omega_{HTP} := \text{wenn}(\Omega_{HTP1} < \Omega_{HTP2}, \Omega_{HTP1}, \Omega_{HTP2}) \quad \Omega_{HTP} = 3.5 \quad \text{Die härtere Sperrforderung gilt!}$$

$$\epsilon := \sqrt{10^{0.1A_r} - 1} \quad \epsilon = 0.509$$

$$n_{TP} := \frac{\text{arcosh} \left[ \sqrt{\frac{10^{0.1(A_H + A_m)} - 1}{\epsilon^2}} \right]}{\text{arcosh}(\Omega_{HTP})} \quad n_{TP} = 1.783$$

$$n_{TP} := \text{ceil}(n_{TP}) \quad n_{TP} = 2$$

$$k := 0..n_{TP} - 1$$

Normierte Tschebyscheff-Tiefpass Pole der Ordnung  $n_{TP}$

$$S_{PT_k} := -\sin \left( \frac{1 + 2 \cdot k}{2 \cdot n_{TP}} \cdot \pi \right) \cdot \sinh \left( \frac{1}{n_{TP}} \cdot \text{arsinh} \left( \frac{1}{\epsilon} \right) \right) + j \cdot \cos \left( \frac{1 + 2 \cdot k}{2 \cdot n_{TP}} \cdot \pi \right) \cdot \cosh \left( \frac{1}{n_{TP}} \cdot \text{arsinh} \left( \frac{1}{\epsilon} \right) \right)$$

$$m := 0, 1.. \text{trunc} \left( \frac{n_{TP} - 1}{2} \right) \quad \text{Indizes der Teilfilter}$$

$$\Omega_{PT_m} := |S_{PT_m}| \quad S_{PT} = \begin{pmatrix} -0.549 + 0.895i \\ -0.549 - 0.895i \end{pmatrix} \quad \Omega_{PT} = (1.05)$$

**Tiefpass-Bandpass Transformation**

$$S_{PB1}(S_{PT}, m) := \frac{S_{PT_m} + \sqrt{(S_{PT_m})^2 - 4D^2}}{2D} \quad \text{Konjugiert komplexe normierte Bandpass Pole}$$

$$S_{PB2}(S_{PT}, m) := \frac{S_{PT_m} - \sqrt{(S_{PT_m})^2 - 4D^2}}{2D}$$

$$S_{PB_{2k}} := S_{PB1}(S_{PT}, k) \quad S_{PB_{2k+1}} := S_{PB2}(S_{PT}, k) \quad S_{PB} = \begin{pmatrix} -0.135 - 0.716i \\ -0.254 + 1.349i \\ -0.135 + 0.716i \\ -0.254 - 1.349i \end{pmatrix}$$

$$\Omega_{PB_k} := |S_{PB_k}| \quad Q_{PB_k} := \frac{-\Omega_{PB_k}}{2 \cdot \text{Re}(S_{PB_k})}$$

$$Q_{PB} = \begin{pmatrix} 2.707 \\ 2.707 \end{pmatrix} \quad \Omega_{PB} = \begin{pmatrix} 0.729 \\ 1.373 \end{pmatrix} \quad \text{Normierte Polfrequenzen und Güten Tschebyscheff Bandpass der Ordnung } 2n.$$

$$A_K := \sqrt{10^{0.05 \cdot A_m}} \cdot \frac{1}{D} \cdot \Omega_{PT} \cdot \text{trunc} \left( \frac{k}{2} \right) \cdot Q_{PB_k} \quad A_K = \begin{pmatrix} 2.839 \\ 2.839 \end{pmatrix} \quad \text{Stufenverstärkungskorrekturfaktor für jede Bandpassstufe}$$

Dimensionierung des Bandpassfilters mit zwei MGK-Teilfiltern:

1. Teilfilter (Index 0)

$$Q_P := Q_{PB_0} \quad \Omega_P := \Omega_{PB_0} \quad A_M := A_{K_0} \quad (\text{Stufenkorrektur Teilfilter 1})$$

$$C := 10 \cdot 10^{-9} \quad (\text{Wahl})$$

$$Q_P = 2.707 \quad \Omega_P = 0.729 \quad f_M = 1.414 \times 10^3 \quad A_M = 2.839$$

$$\omega_M := 2\pi f_M$$

$$R_{11} := \frac{Q_P}{\Omega_P \cdot \omega_M \cdot C \cdot |A_M|} \quad R_{11} = 1.473 \times 10^4 \quad [\Omega]$$

$$R_{31} := \frac{Q_P}{\Omega_P \cdot \omega_M \cdot C \cdot (2Q_P^2 - |A_M|)} \quad R_{31} = 3.539 \times 10^3 \quad [\Omega]$$

$$R_{51} := \frac{2Q_P}{\Omega_P \cdot \omega_M \cdot C} \quad R_{51} = 8.363 \times 10^4 \quad [\Omega]$$

2. Teilfilter (Index 1)

$$Q_P := Q_{PB_1} \quad \Omega_P := \Omega_{PB_1} \quad A_M := A_{K_1} \quad (\text{Stufenkorrektur Teilfilter 2})$$

$$C := 10 \cdot 10^{-9} \quad (\text{Wahl})$$

$$Q_P = 2.707 \quad \Omega_P = 1.373 \quad f_M = 1.414 \times 10^3 \quad A_M = 2.839$$

$$\omega_M := 2\pi f_M$$

$$R_{12} := \frac{Q_P}{\Omega_P \cdot \omega_M \cdot C \cdot |A_M|} \quad R_{12} = 7.818 \times 10^3 \quad [\Omega]$$

$$R_{32} := \frac{Q_P}{\Omega_P \cdot \omega_M \cdot C \cdot (2Q_P^2 - |A_M|)} \quad R_{32} = 1.878 \times 10^3 \quad [\Omega]$$

$$R_{52} := \frac{2Q_P}{\Omega_P \cdot \omega_M \cdot C} \quad R_{52} = 4.439 \times 10^4 \quad [\Omega]$$

Grafik  $\text{dB}(x) := 20 \log(x)$

$$G(s, R_1, C_2, R_3, C_4, R_5) := \frac{\frac{-R_3 \cdot R_5}{R_1 + R_3} \cdot C_4 \cdot s}{1 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} \cdot (C_2 + C_4) \cdot s + \frac{R_1 \cdot R_3 \cdot R_5}{R_1 + R_3} \cdot C_2 \cdot C_4 s^2}$$

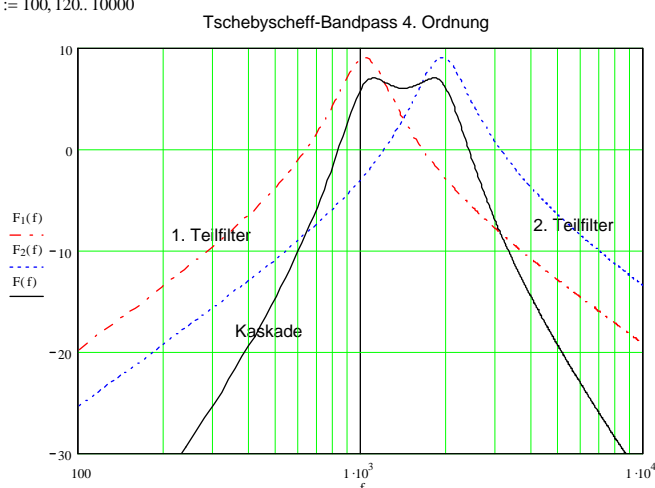
Übertragungsfunktion quadratisches MGK-Teilfilter

$$F_1(f) := \text{dB}(|G(2\pi j \cdot f, R_{11}, C, R_{31}, C, R_{51})|) \quad \text{Amplitudengang Teilfilter 1}$$

$$F_2(f) := \text{dB}(|G(2\pi j \cdot f, R_{12}, C, R_{32}, C, R_{52})|) \quad \text{Amplitudengang Teilfilter 2}$$

$$F(f) := F_1(f) + F_2(f) \quad \text{Amplitudengang Kaskadierung}$$

$$f := 100, 120..10000$$

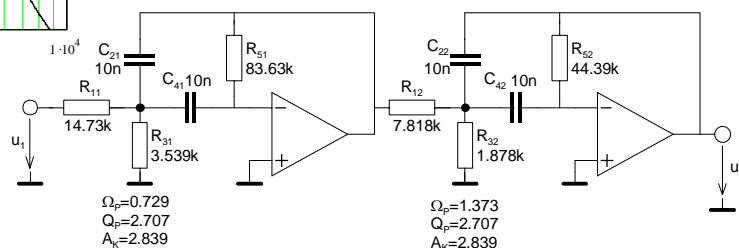


Kontrolle der Grenz- und Sperrfrequenzdämpfungen:

- $F(f_M) = 6 \quad [\text{dB}]$
- $F(f_{C1}) = 6 \quad [\text{dB}]$
- $F(f_{C2}) = 6 \quad [\text{dB}]$
- $F(f_{H1}) = -19.465 \quad [\text{dB}]$
- $F(f_{H2}) = -14.583 \quad [\text{dB}]$

Die gesamte Schaltung wird:

Bild 3-67: Amplitudengang und Detailschema der dimensionierten Tschebyscheff-Bandpass 4. Ordnung nach Beispiel 3-27.

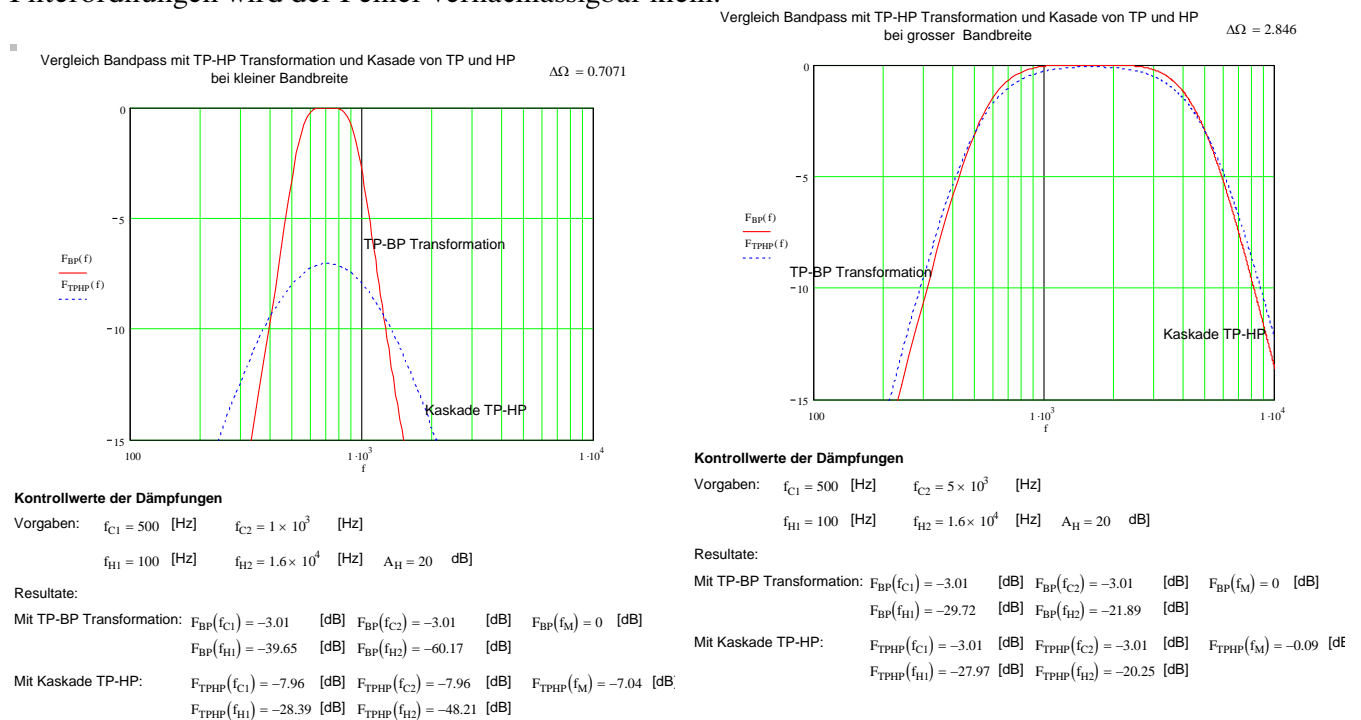


### 3.10 Bandpass aus Tiefpass-Hochpass Zusammenschaltung

Bandpässe mit grosser Bandbreite ( $\Delta\Omega > 1$ ) können auch aus einer Serieschaltung von Tief- und Hochpassfilter realisiert werden. Die obere Grenzfrequenz wird durch die obere Grenzfrequenz des Tiefpasses, die untere Grenzfrequenz durch die untere Grenzfrequenz des Hochpasses bestimmt.

Der Vorteil dieser Methode liegt in der vereinfachten Berechnung und den weniger hohen Anforderungen an die Teilschaltungen.

Bei kleinen Bandbreiten steigt die Dämpfung im Durchlassbereich durch die gegenseitige Beeinflussung stark an wie folgende Beispiele zeigen. Bei grossen Bandbreiten und Filterordnungen wird der Fehler vernachlässigbar klein:



**Bild 3-68:** Vergleich Amplitudengang von Butterworth-Bandpässen 4.Ordnung verschiedener Bandbreite, realisiert mit TP-BP Transformation und Serieschaltung von Tief- und Hochpass.

**Bemerkung:**

Bandpässe aus kaskadierten Tief- und Hochpässen der Ordnung 4 und Vielfachen davon können ohne Dämpfungfehler im Durchlassbereich realisiert werden. Hierbei können immer quadratische Glieder mit reiner Hoch- und Tiefpasscharakteristik gebildet werden.

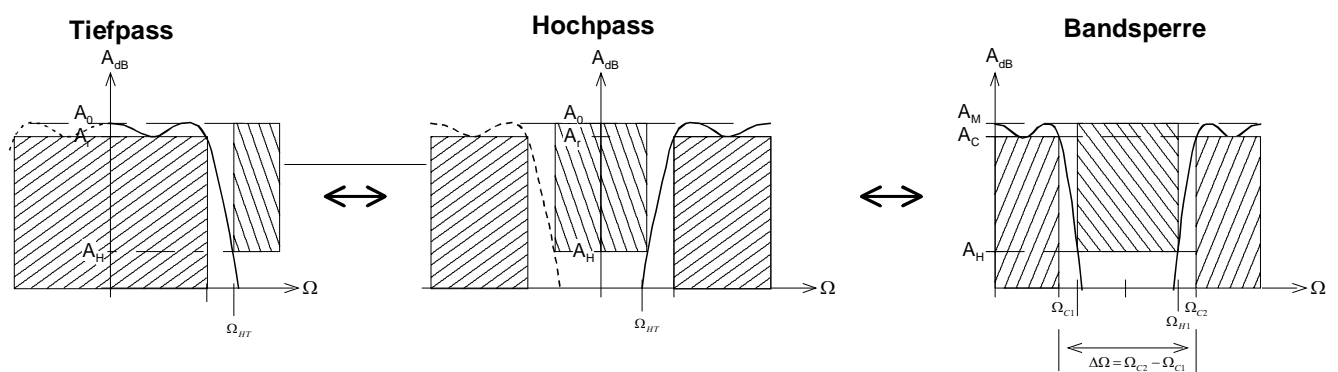
### 3.11 Tiefpass-Bandsperre Transformation

Diese Transformation überführt einen Tiefpass der Ordnung  $n$  in eine Bandsperre der Ordnung  $2n$  mit einer definierbaren Bandbreite  $B$ . Filter dieser Art dienen vor allem zur selektiven Unterdrückung einzelner Frequenzen. Daher ist diese Transformation vor allem zur Realisation von Bandsperren mit kleinen Bandbreiten ( $\Delta\Omega \ll 1$ ) geeignet.

Sie hat aber nicht die praktische Bedeutung wie die Bandpass Transformation, da die aktiven Schaltungen wegen der endlichen Nullstellen in der Übertragungsfunktion wesentlich aufwändiger sind. Die erreichbare maximale Dämpfung ist von der Filtercharakteristik und in der Praxis von den Bauelementeigenschaften abhängig.

In der Praxis trifft man vielfach nur Bandsperren zweiter Ordnung an. Sie sind besonders einfach zu realisieren, da nur ein reeller Pol transformiert wird. Bandsperren höherer Ordnung verlangen Teilschaltungen bei denen die Pole und Nullstellen separat definiert werden können und daher aufwändiger sind.

Die Transformation erfolgt über eine Hochpass-Transformation, gefolgt von einer Spiegelung bei  $\Omega_0=0$  und eine Verschiebung zur Bandmittenfrequenz  $\Omega_M=1$ :



**Bild 3-69:** Tiefpass-Bandsperre Transformation durch Überführen in Hochpass mit anschließender Spiegelung bei  $\Omega_0=0$  und Verschiebung zur Bandmittenfrequenz  $\Omega_M=1$ .

Im Prinzip wird auf einen Hochpass eine Bandpass-Transformation angewandt. Die Steilheit der Flanken entspricht nicht der Steilheit des Referenz Tiefpass. Die Bandbreite  $\Delta\Omega$  ist in Grenzen frei wählbar. Für Filter ohne Welligkeit im Sperrbereich gilt:

$$S_{PT} = \frac{1}{\frac{\omega_M}{\omega_{C2} - \omega_{C1}} \left( \frac{s_{PBS} + \omega_M}{\omega_M} \frac{1}{s_{PBS}} \right)} = \frac{1}{D \left( \frac{1}{\Omega_{PBS}} - \Omega_{PBS} \right)} = \omega_m = \sqrt{\omega_{C1} \cdot \omega_{C2}} \quad (3-66)$$

$$S_{PBS} = \frac{1}{2DS_{PT}} \pm \sqrt{\frac{1}{S_{PT}^2} - 4D^2}$$

$$S_{NBS} = \pm j$$




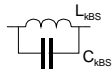


$$\Delta\Omega = \frac{\omega_{C2} - \omega_{C1}}{\omega_m} = \frac{f_{C2} - f_{C1}}{f_m} = \Omega_{C2} - \Omega_{C1}$$

$$D = \frac{1}{\Delta\Omega}$$

### Tiefpass-Bandsperre Transformation

Passive Bandsperren werden wie ein Bandpass synthetisiert, nur dass beim Tiefpass zuerst eine HP-Transformation erfolgt. Dieser Hochpass wird dann mit den Formeln (3-62) in eine Bandsperre umgewandelt.

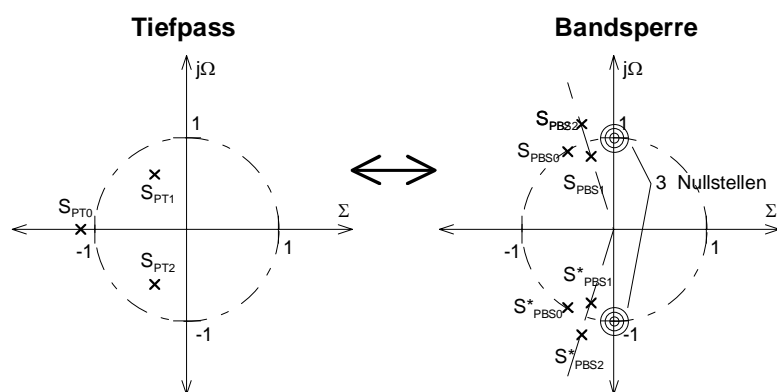
Wird eine Bandsperre aus normierten Tiefpass-Elementwerten bestimmt, so werden die einzelnen Komponenten:

TP	BS
	 $R_{kBS} = g_k \cdot R_0$
	 $C_{kBS} = \frac{1}{w \omega_m g_k R_0}$ $L_{kBS} = \frac{w R_0 g_k}{\omega_m}$
	 $C_{kBS} = \frac{w g_k}{\omega_m R_0}$ $L_{kBS} = \frac{R_0}{w \omega_m g_k}$
	mit: $w = \frac{B}{f_m}$

(3-67)

Die Güte ist bei der Bandsperre per Definition immer auf  $-3.01\text{dB}$  bezogen. Die Transformation fügt dem PN-Diagramm  $n$  konjugiert-imaginäre Nullstellenpaare zu, wobei  $n$  die Ordnung des Referenz-TP ist. Ein reeller TP-Pol erzeugt ein konjugiert komplexes Polpaar mit der Polfrequenz  $\Omega_{PB}=1$ . Ein konjugiert komplexer TP-Pol erzeugt zwei konjugiert komplexe Polpaare mit gleichen Polgüten. Die Polfrequenzen sind zueinander reziprok  $\Omega_{PBS1} = \frac{1}{\Omega_{PBS2}}$  und haben so eine geometrische Symmetrie zu  $\Omega_M=1$ . Die neu zugefügten normierten Nullstellen liegen immer bei  $\pm j$ .

Die grafische Interpretation der Transformation am Beispiel eines Bandsperre 3. Ordnung:



**Bild 3-70:** PN-Diagramm einer Tiefpass-Bandsperre Transformation eines Filters 3. Ordnung. Ein TP-Pol erzeugt jeweils ein konjugiert komplexes Polpaar und es wird eine dreifache konjugiert imaginäre Nullstelle zugefügt.

**Begründung TP-BS Transformation**

Die Transformation kann als Folge als eine TP-HP und HP-BP Transformation aufgefasst werden.

Die Bestimmung der BP-Pole aus dem Referenz Tiefpass erfolgt durch Lösen der quadratischen Gleichung:



$$\frac{1}{S_{PT}} = \frac{1}{\Delta\Omega} \left( S_{PBS} + \frac{1}{S_{PBS}} \right) = D \left( S_{PBS} + \frac{1}{S_{PBS}} \right) \quad \rightarrow DS_{PBS}^2 - \frac{1}{S_{PT}} S_{PBS} + D = 0$$

$$S_{PBS} = \frac{1}{2D \cdot S_{PT}} \pm \frac{\sqrt{\frac{1}{S_{PT}^2} - 4D^2}}{2D} \quad (3-68)$$

Für gegebene Kreisfrequenzen wird die Transformation durch Ersetzen von S mit  $j\Omega$

$$\Omega_{PT} = \frac{1}{D \left( \frac{1}{\Omega_{PBS}} - \Omega_{PBS} \right)} = \frac{\Omega_{PBS}}{D(1 - \Omega_{PBS}^2)}$$

$$\Omega_{PBS} = \frac{1}{2D \cdot \Omega_{PT}} \pm \frac{\sqrt{\frac{1}{\Omega_{PT}^2} + 4D^2}}{2D} \quad (3-69)$$

### Beispiel 3-28: Passive Bandsperre 4. Ordnung

Man dimensioniere eine passive Bandsperre mit Butterworth-Charakteristik 4. Ordnung für eine beidseitige Impedanz von  $Z=250\Omega$ . Die Grenzfrequenzen betragen  $f_{C1}=800\text{kHz}$ ,  $f_{C2}=1.4\text{MHz}$ .

#### Lösung:

Die Aufgabe kann auf zwei Arten gelöst werden. Eine direkte Lösung erfolgt über die normierten Elementwerte  $g_k$ . Alternativ kann über den Referenztieffpass mit TP-HP-BP Transformation die Bandsperre bestimmt werden.

#### 1. Direkte Bestimmung aus den normierten Elementwerten

Zuerst wird die Mittenfrequenz, und die normierten Elementwerte bestimmt. Die normierten Elementwerte können aus einer Tabelle oder mit (3-30) berechnet werden:

##### Vorgaben:

$$Z_0 := 250\Omega \quad n_{BS} := 4$$

$$f_{C1} := 800\text{kHz} \quad f_{C2} := 1.4\text{MHz}$$

##### Berechnungen:

$$f_m := \sqrt{f_{C1} \cdot f_{C2}} \quad f_m = 1.058 \times 10^6 \text{ Hz}$$

$$\omega_m := 2\pi \cdot f_m$$

$$B := f_{C2} - f_{C1} \quad B = 6 \times 10^5 \text{ Hz}$$

$$\Delta\Omega := \frac{B}{f_m} \quad \Delta\Omega = 0.567$$

##### Normierte Elementwerte:

$$\text{ORIGIN} := 0$$

$$n_{TP} := \frac{n_{BS}}{2} \quad *$$

$$k := 1..n_{TP} \quad \text{Indizes der normierten Elemente}$$

$$g_0 := 1$$

$$g_k := 2 \sin \left[ \frac{(2k-1) \cdot \pi}{2n_{TP}} \right] \quad *$$

$$g_{n_{TP}+1} := 1$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.414 \\ 1.414 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normierte Elementwerte Tieffpass

Die entnormierten Elementwerte ergeben sich direkt mit (3-68) für eine der zwei möglichen Lösungen:

Entnormierte Elementwerte:

$$w := \frac{B}{f_m} \quad R_0 := Z_0$$

Elementwerte für erster Kreis in Serie:

R

Parallel LC Serie

Serie LC parallel

$$i := 0, n_{TP} + 1 \dots n_{TP} + 1$$

$$s := 1, 3 \dots n_{TP}$$

$$p := 2, 4 \dots n_{TP}$$

$$R_i := g_i \cdot R_0$$

$$LP_{s,0} := \frac{w \cdot R_0 \cdot g_s}{\omega_m}$$

$$LS_p := \frac{R_0}{w \cdot \omega_m \cdot g_p}$$

$$CP_{s,1} := \frac{1}{w \cdot \omega_m \cdot R_0 \cdot g_s}$$

$$CS_p := \frac{w \cdot g_p}{\omega_m \cdot R_0}$$

$$R = \begin{pmatrix} 250 \\ 0 \\ 0 \\ 250 \end{pmatrix} \Omega$$

$$LP = \begin{pmatrix} 0 \\ 3.014 \times 10^{-5} \end{pmatrix} H$$

$$LS = \begin{pmatrix} 0 \\ 4.689 \times 10^{-5} \end{pmatrix} H$$

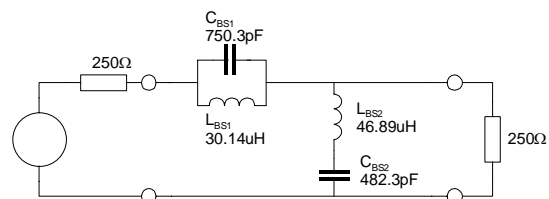
$$CP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7.503 \times 10^{-10} \end{pmatrix} F$$

$$CS = \begin{pmatrix} 0 \\ 4.823 \times 10^{-10} \end{pmatrix} F$$

Abschluss-Widerstände

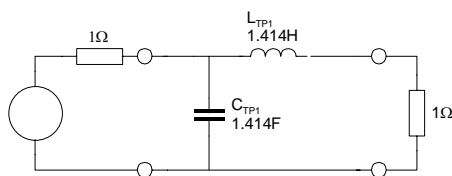
Serie-Elemente

Parallel-Elemente



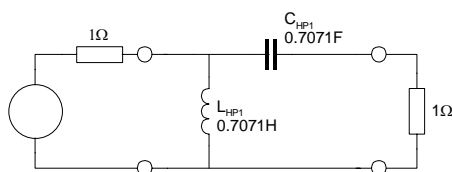
**Bild 3-71:** Berechnung und Schema einer der beiden möglichen Lösungen für die Realisierung einer Bandsperr nach Beispiel 3-28.

2. Synthese aus dem Referenz Tiefpass mit anschließender Transformation und Skalierung. Wie in 1.) werden zuerst die Mittenfrequenz, Bandbreite berechnet. Mit diesen Daten wird der Referenz Tiefpass bestimmt:



**Bild 3-72:** Referenz Tiefpass für Lösung nach 2. Variante nach Beispiel 3-28. (Butterworth, 2. Ordnung)

Der Referenz Tiefpass wird nun zuerst in ein Hochpass transformiert. Anschliessend erfolgt am Hochpass eine Bandpasstransformation nach . Diese Folge erzeugt aus dem Referenz Tiefpass die normierte Bandsperr. Eine Frequenz- und Impedanztransformation schliesst die Berechnungen ab:



**Bild 3-73:** Normierter Hochpass nach TP-HP Transformation für Lösung nach 2. Variante nach Beispiel 3-28. (Butterworth, 2. Ordnung)

Die Bandsperr ergibt sich mit den BP-Transformationsformeln (3-62):

**Vorgaben:**

$L_{TP1} := 1.414H$        $C_{TP1} := 1.414F$       Elementwerte Referenz Tiefpass

**Berechnungen:**

TP-HP Transformation:

$$L_{HP1} := \frac{1}{L_{TP1}} \cdot H^2 *$$

$$L_{HP1} = 0.707H$$

$$C_{HP1} := \frac{1}{C_{TP1}} \cdot F^2 *$$

$$C_{HP1} = 0.707F$$

BP-Transformation:

$$D := \frac{1}{\Delta\Omega}$$

$$\Delta\Omega = 0.567$$

$$L_{BP1} := D \cdot L_{HP1}$$

$$L_{BP1} = 1.247H$$

$$C_{BP1} := \frac{1}{L_{BP1}} \cdot H \cdot F$$

$$C_{BP1} = 0.802F$$

$$C_{BP2} := D \cdot C_{HP1}$$

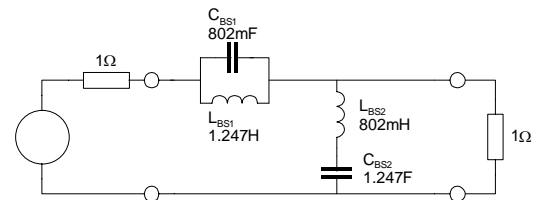
$$C_{BP2} = 1.247F$$

$$L_{BP2} := \frac{1}{C_{BP2}} \cdot H \cdot F$$

$$L_{BP2} = 0.802H$$

1. Parallelkreis in Serie

2. Seriellkreis parallel



**Bild 3-74:** Normierte Bandsperr BP Transformation des normierten Hochpass nach Bild 3-73 für Beispiel 3-28.

Frequenz- und Impedanztransformation:

$$FSF := \frac{\frac{1}{2\pi} Hz}{f_m}$$

$$ISF := \frac{R_0}{1\Omega} *$$

$$L'_{BP1} := L_{BP1} \cdot ISF \cdot FSF$$

$$L'_{BP1} = 4.69 \times 10^{-5} H$$

$$C'_{BP1} := C_{BP1} \cdot \frac{FSF}{ISF}$$

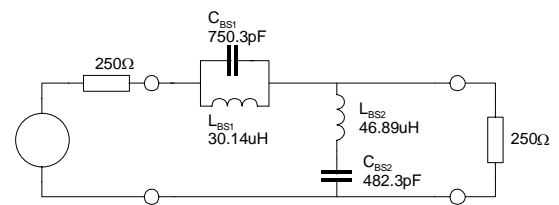
$$C'_{BP1} = 4.822 \times 10^{-10} F$$

$$L'_{BP2} := L_{BP2} \cdot ISF \cdot FSF$$

$$L'_{BP2} = 3.014 \times 10^{-5} H$$

$$C'_{BP2} := C_{BP2} \cdot \frac{FSF}{ISF}$$

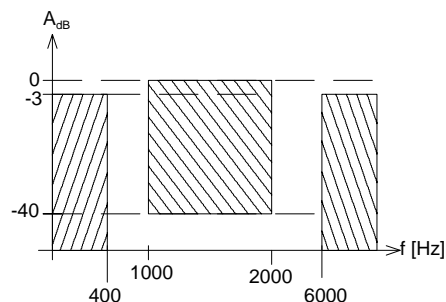
$$C'_{BP2} = 7.504 \times 10^{-10} F$$



**Bild 3-75:** Bandsperr mit entnormierten Werten für Beispiel 3-28.

**Beispiel 3-29:** Minimale Filterordnung für Bandsperr

Welche minimale Filterordnung muss eine Tschebyscheff-Bandsperr haben um der folgenden Sperranforderung zu genügen?



**Bild 3-76:** Dämpfungsschablone für Bestimmung der Filterordnung in Beispiel 3-29.

**Lösung:**

Man bestimmt zuerst das kleinere  $\Omega_{CTP}$  des zugehörigen Referenz Tiefpass. Daraus berechnet man die Tiefpass-Ordnung  $n_{TP}$ . Die Bandsperr-Ordnung ist dann  $2n_{TP}$ .

**Vorgaben:**  $f_{C1} := 400$  [Hz]     $f_{C2} := 6000$  [Hz]     $A_{rdB} := 3$  dB  
 $f_{H1} := 1000$  [Hz]     $f_{H2} := 2000$  [Hz]     $A_{HdB} := 40$  dB

**Berechnungen:**

$$f_M := \sqrt{f_{C1} \cdot f_{C2}} \quad f_M = 1.549 \times 10^3 \text{ [Hz]}$$

$$\Omega_{C1} := \frac{f_{C1}}{f_M} \quad \Omega_{C1} = 0.258$$

$$\Omega_{C2} := \frac{f_{C2}}{f_M} \quad \Omega_{C2} = 3.873$$

$$\Omega_{H2} := \frac{f_{H2}}{f_M} \quad \Omega_{H2} = 1.291$$

$$\Omega_{H1} := \frac{f_{H1}}{f_M} \quad \Omega_{H1} = 0.645$$

**BS-TP Transformation:**

$$D := \frac{1}{\Omega_{C2} - \Omega_{C1}} \quad D = 0.277$$

$$\Omega_{CTP} := \left[ D \cdot \left( \frac{1}{\Omega_{C1}} - \Omega_{C1} \right) \right]^{-1} \quad \Omega_{CTP} = 1 \quad \text{(Die Grenzfrequenzen werden auf } \Omega=1 \text{ transformiert)}$$

$$\Omega_{HTP1} := \left[ D \cdot \left( \frac{1}{\Omega_{H1}} - \Omega_{H1} \right) \right]^{-1} \quad \Omega_{HTP1} = 4$$

$$\Omega_{HTP2} := \left[ D \cdot \left( \frac{1}{\Omega_{H2}} - \Omega_{H2} \right) \right]^{-1} \quad \Omega_{HTP2} = 7$$

$\Omega_{HTP} := \text{wenn}(\Omega_{HTP1} < \Omega_{HTP2}, \Omega_{HTP1}, \Omega_{HTP2}) \quad \Omega_{HTP} = 4 \quad \text{Die härtere Sperrforderung gilt!}$

**Ordnung des Referenziefpass:**

$$\varepsilon := \sqrt{10^{0.1 A_{rdB}} - 1} \quad \varepsilon = 0.998$$

$$n_{TP} := \frac{\text{arcosh} \left( \sqrt{\frac{10^{0.1 A_{HdB}} - 1}{\varepsilon^2}} \right)}{\text{arcosh}(\Omega_{HTP})} \quad n_{TP} = 2.569$$

$$n_{TP} := \text{ceil}(n_{TP}) \quad n_{TP} = 3 \quad \text{(Ordnung Referenz-TP)}$$

**Ordnung des Bandsperre:**

$n_{BS} := 2 \cdot n_{TP} \quad n_{BS} = 6 \quad \text{(Ordnung Bandsperre)}$

Die schaltungstechnische Realisation dieses Filters setzt Teilschaltungen voraus, bei denen die Pole und Nullstellen unabhängig voneinander dimensioniert werden können.

**Beispiel 3-30:** Berechnung normierte Pole und Nullstellen für Bandsperre 8. Ordnung.

Man bestimme die normierten Bandpass-Pole für eine Butterworth-Bandsperre 8. Ordnung mit  $\Delta\Omega=0.6$ . Die Bandsperren-Pole/Nullstellen und die Pole des Referenz Tiefpass sind im PN-Diagramm grafisch darzustellen.

**Vorgaben:**

$\Delta\Omega := 0.6$     normierte Bandbreite  
 $n = 4$     Ordnung des Referenz Tiefpass

$$S_{PT} = \begin{pmatrix} -0.383 + 0.924j \\ -0.924 + 0.383j \\ -0.924 - 0.383j \\ -0.383 - 0.924j \end{pmatrix}$$

Normierte Polstellen  
Butterworth Tiefpass

**Transformationsvorschriften:**

$$\Omega_1 := \frac{\sqrt{\Delta\Omega^2 + 4}}{2} - \frac{\Delta\Omega}{2} \quad \Omega_1 = 0.744$$

$$\Omega_2 := \frac{\sqrt{\Delta\Omega^2 + 4}}{2} + \frac{\Delta\Omega}{2} \quad \Omega_2 = 1.344$$

$$D := \frac{1}{\Omega_2 - \Omega_1} \quad D = 1.667$$

$$S_{PBS1}(S_{TP,m}) := \frac{1}{2D \cdot S_{PT,m}} + \frac{\sqrt{(S_{PT,m})^{-2} - 4D^2}}{2D}$$

Konjugiert komplexe  
normierte Bandpass Pole

$$S_{PBS2}(S_{TP,m}) := \frac{1}{2D \cdot S_{PT,m}} - \frac{\sqrt{(S_{PT,m})^{-2} - 4D^2}}{2D}$$

$m := 0..2 \cdot n - 1$

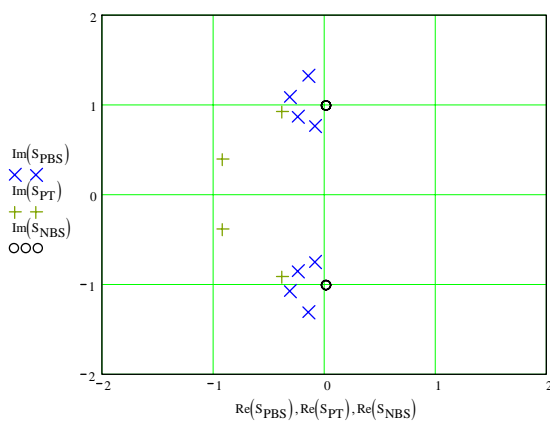
$S_{PBS_{2k}} := S_{PBS1}(S_{PT,k})$      $S_{PBS_{2k+1}} := S_{PBS2}(S_{PT,k})$

$S_{NBS_{2k}} := j$      $S_{NBS_{2k+1}} := -j$

$$S_{PBS} = \begin{pmatrix} -0.084 + 0.755j \\ -0.146 - 1.309j \\ -0.244 + 0.853j \\ -0.31 - 1.083j \\ -0.244 - 0.853j \\ -0.31 + 1.083j \\ -0.084 - 0.755j \\ -0.146 + 1.309j \end{pmatrix}$$

$$S_{NBS} = \begin{pmatrix} j \\ -j \\ j \\ -j \\ j \\ -j \\ j \\ -j \end{pmatrix}$$

Lage der Pol- und Nullstellen Butterworth  
Tiefpass 4. Ordnung-Bandsperre 8. Ordnung

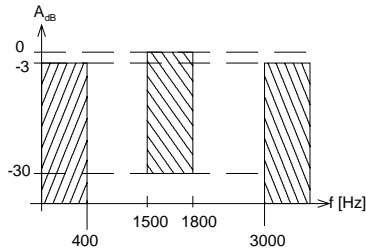


**Bild 3-77:** PN-Diagramm der TP-BP Transformation für einen Tiefpass 3. Ordnung nach Beispiel 3-30.

Legende:  
+ Tiefpass-Pol  
x Bandsperren-Pol  
o Bandsperren-Nullstelle

**Beispiel 3-31:** Dimensionierung Butterworth-Bandsperre.

Folgende Sperranforderung ist mit Bandsperren-Teilfiltern nach Fliege zu realisieren. Die Flanken des Referenz Tiefpass sollen Butterworth-Charakteristik aufweisen.



**Bild 3-78:** Dämpfungsschablone für Dimensionierung in Beispiel 3-31.

**Vorgaben:**  $f_{C1} := 1000$  [Hz]     $f_{C2} := 3000$  [Hz]     $A_{HdB} := 10$  [dB]    Min. Sperrdämpfung  
 $f_{H1} := 1500$  [Hz]     $f_{H2} := 1800$  [Hz]     $A_{mdB} := 0$  [dB]    Verstärkung bei Durchlass

**Berechnungen:**

$$f_M := \sqrt{f_{C1} \cdot f_{C2}} \quad f_M = 1.732 \times 10^3$$

$$\Omega_{C1} := \frac{f_{C1}}{f_M} \quad \Omega_{C2} := \frac{f_{C2}}{f_M} \quad \Omega_{H2} := \frac{f_{H2}}{f_M} \quad \Omega_{H1} := \frac{f_{H1}}{f_M}$$

$$\Omega_{C1} = 0.577 \quad \Omega_{C2} = 1.732 \quad \Omega_{H2} = 1.039 \quad \Omega_{H1} = 0.866$$

**BS-TP-Transformation, Referenz-Tiefpass:**

$$D := \frac{1}{\Omega_{C2} - \Omega_{C1}} \quad D = 0.866$$

$$\Omega_{CTP} := \frac{\Omega_{C1}}{D \cdot (1 - \Omega_{C1}^2)} \quad \Omega_{HTP1} := \frac{\Omega_{H1}}{D \cdot (1 - \Omega_{H1}^2)} \quad \Omega_{HTP2} := \left| \frac{\Omega_{H2}}{D \cdot (1 - \Omega_{H2}^2)} \right|$$

$$\Omega_{CTP} = 1 \quad \Omega_{HTP1} = 4 \quad \Omega_{HTP2} = 15$$

$$\Omega_{HTP} := \text{wenn}(\Omega_{HTP1} < \Omega_{HTP2}, \Omega_{HTP1}, \Omega_{HTP2}) \quad \Omega_{HTP} = 4 \quad \text{Die härtere Sperrforderung gilt!}$$

$$n_{TP} := \frac{\ln(10^{0.1 \cdot A_{HdB}} - 1)}{2 \cdot \ln(\Omega_{HTP})} \quad n_{TP} = 0.792$$

$$n_{TP} := \text{ceil}(n_{TP}) \quad n_{TP} = 1 \quad \text{Ordnung des Referenz Tiefpass}$$

**Normierte Butterworth-Tiefpass Pole der Ordnung n<sub>TP</sub>:**

$$k := 0..n_{TP} - 1$$

$$S_{PT_k} := -\sin\left(\frac{1 + 2 \cdot k}{2 \cdot n_{TP}} \cdot \pi\right) + j \cdot \cos\left(\frac{1 + 2 \cdot k}{2 \cdot n_{TP}} \cdot \pi\right)$$

$$m := 0, 1.. \text{trunc}\left(\frac{n_{TP} - 1}{2}\right) \quad \text{Indizes der Teilfilter}$$

$$\Omega_{PT_m} := |S_{PT_m}| \quad S_{PT} = (-1) \quad \Omega_{PT} = (1) \quad \text{normierte Polfrequenz des Referenz Tiefpass}$$

**Tiefpass-Bandsperren Transformation**

$$S_{PBS1}(S_{PT}, m) := \frac{1}{2D \cdot S_{PT_m}} + \frac{\sqrt{(S_{PT_m})^2 - 4D^2}}{2D} \quad \text{Konjugiert komplexe normierte Bandsperren Pole}$$

$$S_{PBS2}(S_{PT}, m) := \frac{1}{2D \cdot S_{PT_m}} - \frac{\sqrt{(S_{PT_m})^2 - 4D^2}}{2D}$$

$$S_{PBS_{2k}} := S_{PBS1}(S_{PT}, k) \quad S_{PBS_{2k+1}} := S_{PBS2}(S_{PT}, k)$$

$$\Omega_{PBS_k} := |S_{PBS_k}| \quad Q_{PBS_k} := \frac{-\Omega_{PBS_k}}{2 \cdot \text{Re}(S_{PBS_k})} \quad S_{PBS} = \begin{pmatrix} -0.577 + 0.816i \\ -0.577 - 0.816i \end{pmatrix}$$

$$Q_{PBS} = (0.866) \quad \Omega_{PBS} = (1) \quad \text{Normierte Pole und Butterworth Bandsperre der Ordnung } 2n.$$

Dimensionierung aktives Teilfilter nach CHEN, 'Circuit and Filters Handbook', S.2397

$$Q_p := Q_{pBS_0} \quad \Omega_p := \Omega_{pBS_0} \quad \omega_M := 2\pi f_M$$

$$Q_p = 0.866 \quad \Omega_p = 1 \quad f_M = 1.732 \times 10^3$$

$$C_4 := 10 \cdot 10^{-9} \text{ [F]} \quad R_5 := 10 \cdot 10^3 \text{ [\Omega]} \quad R_1 := 10 \cdot 10^3 \text{ [\Omega]} \quad (\text{Wahl})$$

Berechnung der Elementwerte:

$$C_6 := C_4 \quad R_3 := \frac{1}{R_5 \cdot C_6 \cdot C_4 \cdot \Omega_p^2 \cdot \omega_M^2}$$

$$R_2 := R_1$$

$$R_6 := \frac{Q_p}{C_6 \cdot \Omega_p \cdot \omega_M}$$

$$R_{6a} := 2R_6 \quad R_{6b} := 2R_6$$

Resultate:

$$R_1 = 1 \times 10^4 \text{ [\Omega]} \quad R_2 = 1 \times 10^4 \text{ [\Omega]} \quad R_3 = 8.443 \times 10^3 \text{ [\Omega]}$$

$$R_5 = 1 \times 10^4 \text{ [\Omega]} \quad R_{6a} = 1.592 \times 10^4 \text{ [\Omega]} \quad R_{6b} = 1.592 \times 10^4 \text{ [\Omega]}$$

Grafik

$$dB(x) := 20 \log(x)$$

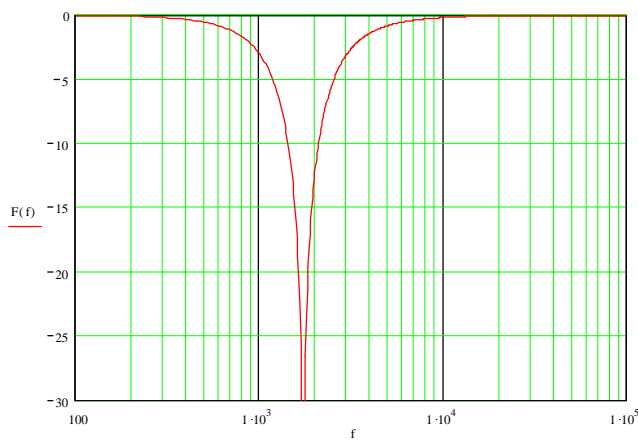
$$G(s, R_1, R_2, R_3, C_4, R_5, C_6, R_{6a}, R_{6b}) := \frac{s^2 \cdot C_6 \cdot C_4 \cdot \frac{1}{R_2} + s \cdot C_4 \cdot \left( \frac{1}{R_2 \cdot R_{6b}} - \frac{1}{R_1 \cdot R_{6a}} \right) + \frac{1}{R_1 \cdot R_3 \cdot R_5}}{s^2 \cdot C_4 \cdot C_6 \cdot \frac{1}{R_2} + s \cdot C_4 \cdot \frac{1}{R_2} \left( \frac{1}{R_{6a}} + \frac{1}{R_{6b}} \right) + \frac{1}{R_1 \cdot R_3 \cdot R_5}}$$

Übertragungsfunktion quadratisches Notch-Teilfilter mit Impedanzkonverter

$$F(f) := dB\left(\left|G(2\pi j \cdot f, R_1, R_2, R_3, C_4, R_5, C_6, R_{6a}, R_{6b})\right|\right)$$

$$f := 100, 120.. 100000$$

Butterworth-Bandsperre 2. Ordnung



Kontrolle der Grenz- und Sperrfrequenzdämpfungen:

$$F(f_M) = -316.614 \text{ [dB]}$$

$$F(f_{C1}) = -3.01 \text{ [dB]}$$

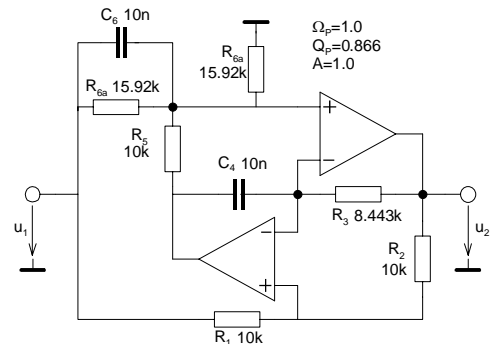
$$F(f_{C2}) = -3.01 \text{ [dB]}$$

$$F(f_{H1}) = -12.304 \text{ [dB]}$$

$$F(f_{H2}) = -12.304 \text{ [dB]}$$

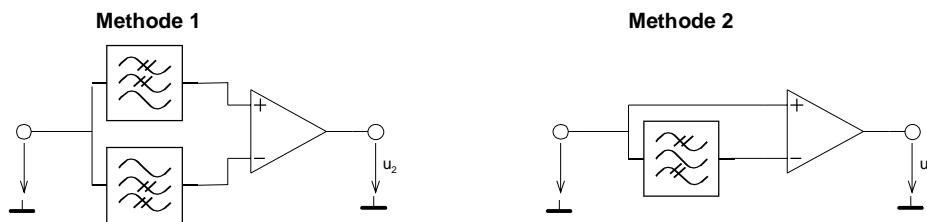
Die gesamte Schaltung wird:

Bild 3-79: Amplitudengang und Detailschema der dimensionierten Butterworth-Bandsperre 2. Ordnung nach Beispiel 3-31.



### 3.12 Bandsperrre aus TP-HP oder BS-Zusammenschaltungung

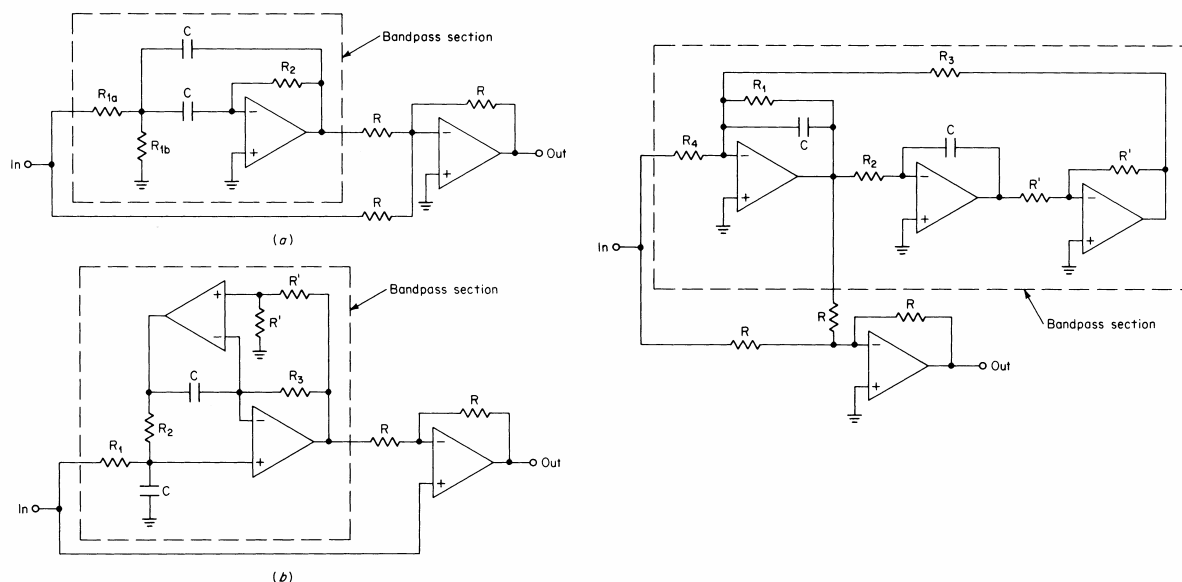
Bandsperrren können auch aus einer Zusammenschaltung von Tief- und Hochpassfilter oder Bandpässen realisiert werden. Dieses Konzept wird direkt beim sog. Universal-Filter (KHN-Filter) verfolgt. Dabei werden die gefilterten Signale geeignet voneinander subtrahiert. Der Vorteil der Methode ist die einfache Realisation von Bandsperrren, ohne dass die Nullstellen der Übertragungsfunktion explizit implementiert werden müssen. Die erreichbare Sperrdämpfung ist aber wegen der nicht idealen Operationsverstärker zum Teil deutlich geringer als bei einer direkten Realisation.



**Bild 3-80:** Realisation von Bandsperrren ohne TP-BS Transformation. Die erreichbare Sperrdämpfung ist aber deutlich geringer als eine direkt Lösung wie in Beispiel 3-31 gezeigt.

### Beispiel 3-32: Bandsperrren zweiter Ordnung mit Bandpassfilter

Nachfolgend sei ohne Rechnung eine Reihe möglicher Realisationen von Bandsperrren zweiter Ordnung vorgestellt. Eine Realisation mit einem Bandpass ist bei einer Bandsperrre möglich, da der einzige reelle Pol des Referenziefpass in komplexen Pol transformiert wird.



**Bild 3-81:** Prinzip-Beispiele von Bandsperrren, realisiert mit Bandpässen.

- a.) Schaltung mit MGK Bandpass
- b.) Schaltung mit Impedanzkonverter nach Fliege
- c.) Schaltung mit Zustandsvariablen-Filter

Quelle: Williams/Taylor, "Electronic Filter Design", Williams/Taylor, McGraw-Hill



### 3.13 Grundglieder für aktive Teilfilter

Ziel der folgenden Betrachtungen ist es Dimensionierungsgleichungen für die Elementwerte der verschiedenen Teilschaltungen herzuleiten und die Übertragungsfunktion bei gegebenen Elementwerten.

Grundlage für die Dimensionierung der einzelnen Teilschaltungen (Glieder) sind immer Polfrequenz und Polgüte und Verstärkung im Durchlassbereich.

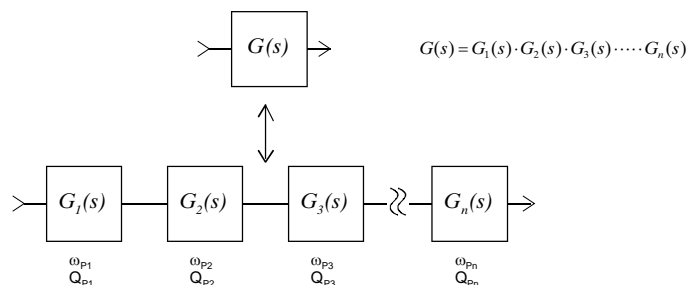
Für Schaltungen ohne endliche Nullstellen in der Übertragungsfunktion (TP, HP oder BP ohne Welligkeit im Sperrbereich) können relativ einfache Schaltungen verwendet werden. Bewährt haben sich Schaltungen mit Mitkopplung nach Sallen-Key, Schaltungen mit Mehrfach-Gegenkopplung, wie auch sog. State-Variable-Filter.

Bandsperrern höherer Ordnung, inverse Tschebyscheff- oder elliptische Filter verlangen die Implementierung endlicher Nullstellen. Diese Schaltungen sind wesentlich aufwändiger und verlangen für gute Resultate eine unabhängige Abgleichbarkeit der Pole und Nullstellen.

Wir beschränken uns in den folgenden Betrachtungen auf Glieder ersten und zweiten Grades. Aus der Fülle der Grundschaltungen zweiten Grades erfolgt eine exemplarische Auswahl mit Sallen-Key und Mehrfach-Gegenkopplung.

#### 3.13.1 Prinzip der Aufteilung in Teilfilter (Kaskadierung)

Filter höherer Ordnung ( $n > 2$ ) werden häufig aus Gründen der Stabilität und einfacheren Berechnungen aus Teilfiltern zweiter und erster Ordnung zusammengesetzt. Man bildet hierzu eine Kaskade mit der maximal möglichen Anzahl quadratischer Filter. Bei ungerader Filterordnung wird ein lineares Glied zugefügt.



**Bild 3-82:** Sinnvoll ist die Realisation eines Filters höherer Ordnung als Kaskade von Teilfiltern zweiter und erster Ordnung.

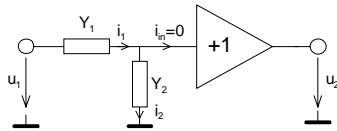
Die Teilfilter werden wegen der besseren Aussteuerbarkeit in Reihenfolge aufsteigender Polgüte angeordnet.

Grundsätzlich wären auch Teilfilter dritter oder noch höherer Ordnung möglich. Die Berechnung der Elementwerte wird aber sehr aufwändig. Weiterer Nachteil dieser Schaltungen ist die schlechte Abgleichbarkeit. Idealerweise sollten bei der Filterschaltung die Polfrequenz, Polgüte und wenn notwendig die Verstärkung unabhängig abgleichbar sein und die Einstellungen sollten sich nicht gegenseitig beeinflussen.

### 3.13.2 Grundglieder erster Ordnung

Sie erlauben die Realisation Hoch- und Tiefpasscharakteristik mit einem reellen Pol  $\omega_p$ . Die theoretische Polgüte von 0.5 fließt nicht in die Berechnungen ein.

Das Grundglied erster Ordnung wird mit allgemeinen Impedanzen und Admittanzen:



**Bild 3-83:** Grundglied der ersten Ordnung. Je nach Wahl der Elemente für  $Y_1$ ,  $Y_2$  kann ein Hochpass- oder Tiefpassverhalten erreicht werden.

Die Übertragungsfunktion wird:

$$(u_1 - u_2)Y_1 = u_2Y_2 \quad \rightarrow \quad G = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2}$$

Je nach gewünschter TP- oder HP-Funktion wird  $Y_1$  oder  $Y_2$  mit  $sC$  ersetzt. Man benutzt hier nur Kondensatoren, Induktivitäten werden bei aktiven Filtern, wenn immer möglich, vermieden.

Beim Tiefpass wird  $Y_1 = \frac{1}{R}$ ,  $Y_2 = sC$  und die Übertragungsfunktion lautet:

$$G(s) = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R} + sC} = \frac{1}{1 + sRC}$$

### Übertragungsfunktion TP 1. Ordnung (3-70)

Die Bestimmung der Elementwerte  $R$  und  $C$  erfolgt über einen Koeffizientenvergleich mit der entnormierten Tiefpass-Übertragungsfunktion:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{\omega_p} s} = \frac{1}{1 + sRC}$$

Bei Gleichheit müssen auf beiden Seiten die Koeffizienten in den Nennerpolynomen gleich sein. Man erhält daher die Beziehung:

$$\frac{1}{\omega_p} = RC = \frac{1}{\Omega_p \cdot \omega_C}$$

Normalerweise werden bei einer Dimensionierung die Kondensatoren vorgegeben, da Kondensatoren mit kleinen Toleranzen (1%) nur in grob abgestuften E-Reihen kostengünstig erhältlich sind, Widerstände aber problemlos in E-48 oder E-96 Abstufung.

Bei Vorgabe des Kondensators  $C$  wird bei gegebener Polfrequenz  $\omega_p$  der Widerstand:

$$R = \frac{1}{C \cdot \omega_p} = \frac{1}{C \cdot \omega_C \cdot \Omega_p}$$

### Dimensionierung TP 1. Ordnung (3-71)

Analog wird für den Hochpass erster Ordnung mit  $Y_1 = sC, Y_2 = \frac{1}{R}$ :

$$G(s) = \frac{sC}{sC + \frac{1}{R}} = \frac{sRC}{1 + sRC}$$

**Übertragungsfunktion HP  
1. Ordnung** (3-72)

Der Koeffizientenvergleich mit dem entnormierten Hochpass erster Ordnung ergibt:

$$\frac{\frac{1}{\omega_p} s}{1 + \frac{1}{\omega_p} s} = \frac{sRC}{1 + sRC}$$

$$\frac{1}{\omega_p} = RC = \frac{1}{\Omega_p \cdot \omega_c} \rightarrow R = \frac{1}{C \cdot \Omega_p \cdot \omega_c} = \frac{1}{C \cdot \omega_p}$$

**Dimensionierung HP  
1. Ordnung** (3-73)

**3.13.3 Grundglieder zweiter Ordnung**

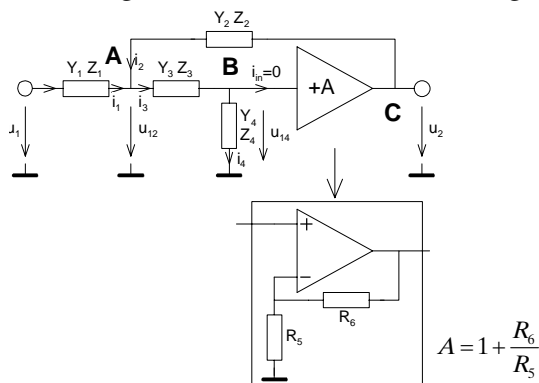
Für Grundglieder zweiter Ordnung existieren zahlreiche verschiedene Schaltungsarten. Sie unterscheiden sich im Schaltungsaufwand, d.h. Anzahl Operationsverstärker, Abgleichbarkeit, erreichbare und einstellbare Verstärkung/Polgüte und Sensitivitäten.

Die Sensitivitäten beschreiben wie stark sich eine Streuung eines Parameters, z.B. Widerstand oder Kondensator auf die Filtereigenschaften auswirken.

Universell einsetzbar und einfach zu dimensionieren sind die Schaltungen nach Sallen-Key und Mehrfach-Gegenkopplung. Sie erlauben eine einfache Realisation aktiver TP, HP und BP-Filter ohne Welligkeit im Sperrbereich.

**3.13.3.1 Schaltung nach Sallen-Key**

Die Schaltung arbeitet mit Einfach-Mitkopplung. Sie wurde 1955 durch R. Sallen und P. Key vorgestellt. Sie zeichnet sich durch ihre Einfachheit und die günstigen Empfindlichkeitseigenschaften bezüglich Bauelementetoleranzen aus. Die allgemeine Schaltung für Teilfilter zweiter Ordnung ist:



**Bild 3-84:** Schaltung für quadratisches Teilfilter nach Sallen-Key mit Einfach-Mitkopplung und einstellbarer Verstärkung A. Je nach Wahl der Elemente für die Impedanzen/ Admittanzen können TP,HP oder BP realisiert werden.

In den Knoten A, B und C gilt:

$$A: \frac{u_1 - u_{12}}{Z_1} + \frac{u_2 - u_{12}}{Z_2} = \frac{u_{12} - u_{14}}{Z_3}$$

$$B: \frac{u_{12} - u_{14}}{Z_3} = \frac{u_{14}}{Z_4}$$

$$C: u_2 = A \cdot u_{14}$$

Die Auflösung nach  $u_2(u_i)$  erfolgt in einem ersten Schritt durch Einsetzen von (C) in (A) und (B). Es verbleibt ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten das ohne Probleme nach  $u_2$  aufgelöst werden kann:

$$A: \quad \frac{u_1 - u_{12}}{Z_1} + \frac{u_2 - u_{12}}{Z_2} = \frac{u_{12} - u_{14}}{Z_3}$$

$$B: \quad \frac{u_{12} - u_{14}}{Z_3} = \frac{u_{14}}{Z_4}$$

$$C: \quad u_2 = A \cdot u_{14} \quad u_{14} = \frac{u_2}{A}$$

$$(A-C): \quad \frac{u_1 - u_{12}}{Z_1} + \frac{u_2 - u_{12}}{Z_2} = \frac{u_{12} - \frac{u_2}{A}}{Z_3}$$

$$(B-C): \quad \frac{u_{12} - \frac{u_2}{A}}{Z_3} = \frac{\frac{u_2}{A}}{Z_4}$$

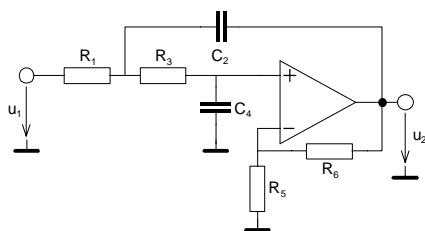
Die Lösung wird

$$G(s) = \frac{u_2}{u_1} = \frac{A \cdot Z_2 Z_4}{Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3 + Z_1 Z_4 (1-A) + Z_2 Z_4 + Z_1 Z_2} = \frac{A \cdot Y_1 Y_3}{Y_1 Y_4 + Y_2 Y_4 + Y_2 Y_3 (1-A) + Y_1 Y_3 + Y_3 Y_4} \quad (3-74)$$

Die Definition der Übertragungscharakteristik erfolgt durch geeignetes Einsetzen von Widerständen und Kondensatoren bei den Admittanzen. (Bei der Admittanzdarstellung wird die entstehende Übertragungsfunktion direkt ersichtlich.)

### 3.13.3.2 Tiefpass

Man erhält ein Tiefpassglied, wenn  $Y_1 = \frac{1}{R_1}, Y_2 = sC_2, Y_3 = \frac{1}{R_3}, Y_4 = sC_4$ .



**Bild 3-85:** Tiefpass nach Sallen-Key 2. Ordnung mit einstellbarer Verstärkung A.

$$G(s) = \frac{A \cdot \frac{1}{R_1} \frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_1} sC_4 + sC_2 sC_4 + sC_2 \frac{1}{R_3} (1-A) + \frac{1}{R_1} \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_3} sC_4} = \frac{A \cdot \frac{1}{R_1} \frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_1} \frac{1}{R_3} + s \left( \frac{1}{R_1} C_4 + \frac{1}{R_3} C_4 + C_2 \frac{1}{R_3} (1-A) \right) + sC_2 sC_4}$$

$$= \frac{A}{1 + s(R_3 C_4 + R_1 C_4 + R_1 C_2 (1-A)) + s^2 R_1 R_3 C_2 C_4} \quad \text{Übertragungsfunktion Sallen-Key TP} \quad (3-75)$$

Die Elementwerte erhält man durch einen Koeffizientenvergleich mit der entnormierten Übertragungsfunktion des Tiefpass zweiter Ordnung:

$$1 + \frac{1}{\omega_c \Omega_p Q_p} s + \frac{1}{\omega_c^2 \Omega_p^2} s^2 = \frac{A}{1 + s(R_3 C_4 + R_1 C_4 + R_1 C_2(1 - A)) + s^2 R_1 R_3 C_2 C_4}$$

$$I: \frac{1}{\omega_c \Omega_p Q_p} = R_3 C_4 + R_1 C_4 + R_1 C_2(1 - A)$$

$$II: \frac{1}{\omega_c^2 \Omega_p^2} = R_1 R_3 C_2 C_4$$

Die Auflösung nach  $R_1$  und  $R_3$  ist mit erheblichen algebraischen Umformungen verbunden. Eine rasche Lösung kann unter Zuhilfenahme eines Computer-Algebra Paketes gefunden werden. Die Lösung für  $R_1$  und  $R_3$  wird mit MAPLE V:

```

GdTP:=(1+1/(Wp * Qp) * s + 1/Wp^2 * s^2);      # Nennerpolynom der entnormierten Tiefpass Definition
G:=G;                                           # Zuvor berechnetes G(s) des Sallen-Key Tiefpass
eqn:={coeff(denom(G),s,1)=coeff(GdTP,s,1),
      coeff(denom(G),s,2)=coeff(GdTP,s,2)};    # Gleichungssystem fuer Koeffizientenvergleich (zu s^2, s^2)
lsg:=solve(eqn,{R1,R3});
lsg:=evalf(allvalues(lsg));                    # RootOf auflösen
simplify(lsg[1,1]);
simplify(lsg[2,2]);
simplify(lsg[2,1]);
simplify(lsg[1,2]);

```

$$GdTP = 1 + \frac{s}{W_p Q_p} + \frac{s^2}{W_p^2}$$

$$G = \frac{A}{R_1 R_3 s^2 C_4 C_2 + (R_3 C_4 + R_1 C_4 - R_1 A C_2 + R_1 C_2) s + 1}$$

$$eqn = (R_3 C_4 + R_1 C_4 - R_1 A C_2 + R_1 C_2 = \frac{1}{W_p Q_p}, R_1 R_3 C_4 C_2 = \frac{1}{W_p^2})$$

$$R_3 = .5000000000 \frac{C_2 + \sqrt{C_2(C_2 - 4. C_4 Q_p^2 + 4. C_2 A Q_p^2 - 4. C_2 Q_p^2)}}{Q_p W_p C_2 C_4}$$

$$R_3 = .5000000000 \frac{C_2 - 1. \sqrt{C_2(C_2 - 4. C_4 Q_p^2 + 4. C_2 A Q_p^2 - 4. C_2 Q_p^2)}}{Q_p W_p C_2 C_4}$$

$$R_1 = -.5000000000 \frac{C_2 + \sqrt{C_2(C_2 - 4. C_4 Q_p^2 + 4. C_2 A Q_p^2 - 4. C_2 Q_p^2)}}{C_2 Q_p (-1. C_4 + A C_2 - 1. C_2) W_p}$$

$$R_1 = -.5000000000 \frac{C_2 - 1. \sqrt{C_2(C_2 - 4. C_4 Q_p^2 + 4. C_2 A Q_p^2 - 4. C_2 Q_p^2)}}{C_2 Q_p (-1. C_4 + A C_2 - 1. C_2) W_p}$$

Zusammengefasst erhält man folgende Dimensionierungsgleichungen für das Tiefpassglied nach Sallen-Key bei vorgegebenen Kondensatoren:

$C_2, C_4, R_5$  vorgegeben:

$$C_4 < \frac{C_2(1 + 4Q_p^2(A_0 - 1))}{4Q_p^2} \quad C_4 \neq C_2(A_0 - 1) \quad (\text{Bedingungen})$$

$$R_1 = \frac{1}{2\omega_c \Omega_p Q_p} \cdot \frac{C_2 \mp \sqrt{C_2^2 - 4Q_p^2 C_2 (C_4 + C_2(1 - A_0))}}{C_2(C_4 - C_2(A_0 - 1))} \quad (\text{nur pos. reelle Lsg. verwenden})$$

$$= \frac{1}{(\omega_c \Omega_p)^2 R_3 C_2 C_4}$$

$$R_3 = \frac{1}{2\omega_c \Omega_p Q_p} \frac{C_2 \pm \sqrt{C_2^2 - 4Q_p^2 C_2 (C_4 + C_2(1 - A_0))}}{C_2 C_4} \quad (\text{nur pos. reelle Lsg. verwenden}) \quad (3-76)$$

$$= \frac{1}{(\omega_c \Omega_p)^2 R_1 C_2 C_4}$$

$$Q_p = \frac{\sqrt{R_1 R_3 C_2 C_4}}{C_4(R_1 + R_3) + R_1 C_2(1 - A_0)} \quad R_6 = R_5(A_0 - 1)$$

$$\Omega_p = \frac{1}{\omega_c \sqrt{R_1 R_3 C_2 C_4}}$$

## Dimensionierung Sallen-Key Tiefpass

Wird Verstärkung im Durchlassbereich  $A=1$  gesetzt, vereinfachen sich die Formeln etwas und wir erhalten den Formelsatz, wie im Anhang aufgeführt:

Spezialfall  $A_0 = 1$ : ( $C_2, C_4$  vorgegeben)

$$C_4 < \frac{C_2}{4Q_p^2} \quad (\text{Bedingung})$$

$$R_1 = \frac{C_2 \pm \sqrt{C_2^2 - 4Q_p^2 \cdot C_2 \cdot C_4}}{2C_2 \cdot C_4 \cdot Q_p \cdot \Omega_p \cdot \omega_c} = \frac{1}{R_3 \cdot C_2 \cdot C_4 \cdot \Omega_p^2 \cdot \omega_c^2}$$

$$R_3 = \frac{C_2 \mp \sqrt{C_2^2 - 4Q_p^2 \cdot C_2 \cdot C_4}}{2C_2 \cdot C_4 \cdot Q_p \cdot \Omega_p \cdot \omega_c} = \frac{1}{R_1 \cdot C_2 \cdot C_4 \cdot \Omega_p^2 \cdot \omega_c^2} \quad R_6 = 0 \quad (3-77)$$

$$Q_p = \sqrt{\frac{R_1 R_3 C_2}{C_4 (R_1 + R_3)^2}}$$

$$\Omega_p = \frac{1}{\omega_c \sqrt{R_1 R_3 C_2 C_4}}$$

## Sallen-Key Tiefpass mit $A_\infty=1$

Diese Formeln ermöglichen eine universelle Dimensionierung und Analyse von Tiefpassgliedern zweiter Ordnung nach Sallen-Key.

**Beispiel 3-33:** Butterworth-Tiefpass nach Sallen-Key 2. Ordnung.

Man realisiere ein Butterworth-Tiefpass 2. Ordnung für eine Grenzfrequenz  $f_c=250\text{Hz}$  und einer Durchlassverstärkung von 14dB. Wählbare Kondensatoren sollen mit 100nF in E3 möglichst klein gewählt werden. Man kontrolliere ferner die normierte Polfrequenz und Polgüte anhand der Elementwerte.

**Vorgaben:**

$$Q_P := 0.707 \quad A_{0dB} := 14 \text{ [dB]} \quad f_C := 0.25 \cdot 10^3 \text{ [Hz]}$$

$$\Omega_P := 1.00 \quad C_2 := 100 \cdot 10^{-9} \text{ [F]} \quad R_5 := 10 \cdot 10^3 [\Omega]$$

Dimensionierung SK 2. Ordnung bei gegebenen Kondensatorwerten C2,C4:

**Berechnungen:**

$$\omega_C := 2 \cdot \pi \cdot f_C$$

$$A := 10^{0.05 A_{0dB}} \quad A = 5.012$$

$$C_{4max} := \frac{C_2 \cdot [1 + 4Q_P^2 \cdot (A - 1)]}{4Q_P^2} \quad C_{4max} = 4.512 \times 10^{-7} \text{ [F]} \quad C_4 := 100 \cdot 10^{-9} \text{ [F] (Wahl)}$$

$$R_{11} := \frac{1}{2 \cdot \omega_C \cdot \Omega_P \cdot Q_P \cdot C_2} \cdot \frac{C_2 + \sqrt{C_2^2 - 4 \cdot Q_P^2 \cdot C_2 \cdot [C_4 + C_2 \cdot (1 - A)]}}{C_4 - C_2 \cdot (A - 1)} \quad R_{11} = -5.456 \times 10^3 \text{ [\Omega]}$$

$$R_{12} := \frac{1}{2 \cdot \omega_C \cdot \Omega_P \cdot Q_P \cdot C_2} \cdot \frac{C_2 - \sqrt{C_2^2 - 4 \cdot Q_P^2 \cdot C_2 \cdot [C_4 + C_2 \cdot (1 - A)]}}{C_4 - C_2 \cdot (A - 1)} \quad R_{12} = 2.466 \times 10^3 \text{ [\Omega]}$$

$$R_{31} := \frac{1}{2 \cdot \omega_C \cdot \Omega_P} \cdot \frac{C_2 - \sqrt{C_2^2 - 4 \cdot Q_P^2 \cdot C_2 \cdot [C_4 + C_2 \cdot (1 - A)]}}{Q_P \cdot C_2 \cdot C_4} \quad R_{31} = -7.428 \times 10^3 \text{ [\Omega]}$$

$$R_{32} := \frac{1}{2 \cdot \omega_C \cdot \Omega_P} \cdot \frac{C_2 + \sqrt{C_2^2 - 4 \cdot Q_P^2 \cdot C_2 \cdot [C_4 + C_2 \cdot (1 - A)]}}{Q_P \cdot C_2 \cdot C_4} \quad R_{32} = 1.643 \times 10^4 \text{ [\Omega]}$$

**Wahl:**  $R_1 := R_{12}$        $R_3 := R_{32}$       (nur pos. Wertepaar verwenden)

$$R_6 := (A - 1) \cdot R_5 \quad R_6 = 4.012 \times 10^4 \text{ [\Omega]}$$

**Resultate:**

$$R_1 = 2.466 \times 10^3 \text{ [\Omega]} \quad C_2 = 1 \times 10^{-7} \text{ [F]} \quad R_3 = 1.643 \times 10^4 \text{ [\Omega]} \quad C_4 = 1 \times 10^{-7} \text{ [F]}$$

$$R_5 = 1 \times 10^4 \text{ [\Omega]} \quad R_6 = 4.012 \times 10^4 \text{ [\Omega]}$$

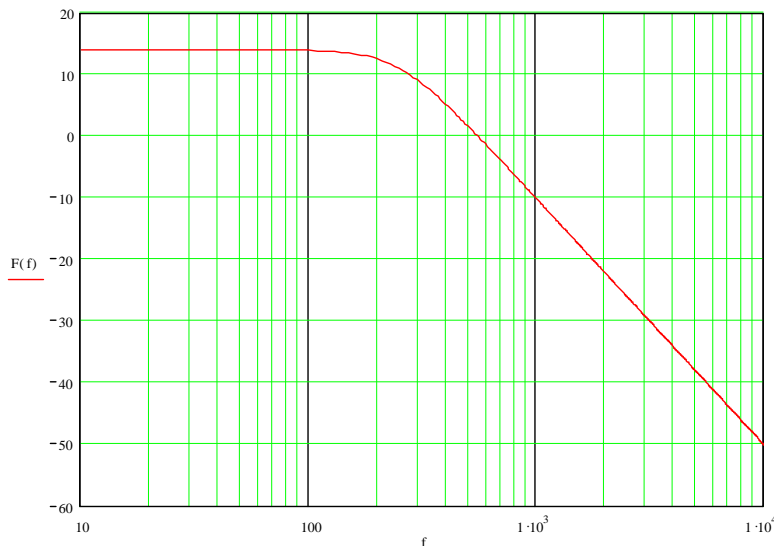
**Grafik:**  $dB(x) := 20 \cdot \log(x)$

$$G(s) := \frac{A}{R_1 \cdot R_3 \cdot C_2 \cdot C_4 \cdot s^2 + [R_3 \cdot C_4 + R_1 \cdot C_2 \cdot (1 - A) + R_1 \cdot C_4] \cdot s + 1}$$

Übertragungsfunktion TP  
nach Sallen-Key 2. Ordnung

$$F(f) := dB(|G(f \cdot 2\pi \cdot j)|)$$

$f := 10, 20.. 10000$



**Bild 3-86:** Amplitudengang und Detailschema des Tiefpass 2. Ordnung nach Beispiel 3-33.

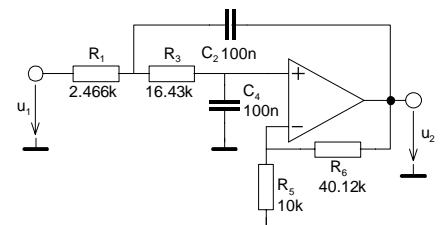
**Kontrollwerte:**

$F(0) = 14$  [dB] Dämpfung (Verstärkung) bei 0Hz

$F(f_c) = 10.988$  [dB] Dämpfung bei Grenzfrequenz  $f_c$

$$Q_p := \frac{\sqrt{R_1 \cdot R_3 \cdot C_2 \cdot C_4}}{C_4 \cdot (R_1 + R_3) + R_1 \cdot C_2 \cdot (1 - A)} \quad Q_p = 0.707 \quad \text{normierte Polgüte}$$

$$\Omega_p := \frac{1}{\omega_c \sqrt{R_1 \cdot R_3 \cdot C_2 \cdot C_4}} \quad \Omega_p = 1 \quad \text{normierte Polfrequenz}$$

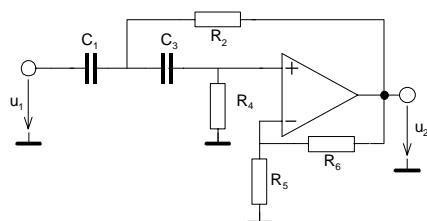


Die gesamte Schaltung wird mit den berechneten Elementen:

### 3.13.3.3 Hochpass

Das Hochpassglied zweiter Ordnung ergibt sich

$$\text{wenn } Y_1 = sC_1, Y_2 = \frac{1}{R_2}, Y_3 = sC_3, Y_4 = \frac{1}{R_4}.$$



**Bild 3-87:** Hochpass nach Sallen-Key 2. Ordnung mit einstellbarer Verstärkung A.

### Übertragungsfunktion Sallen-Key HP

$$G(s) = \frac{A_\infty \cdot sC_1sC_3}{sC_1sC_3 + s \left( sC_1 \frac{1}{R_4} + sC_3 \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2} sC_3 (1 - A_\infty) \right) + \frac{1}{R_2} \frac{1}{R_4}} = \frac{A_\infty \cdot s^2 C_1 C_3 R_4 R_2}{1 + s(R_2(C_1 + C_3) + R_4 C_3(1 - A_\infty)) + s^2 C_1 C_3 R_2 R_4} \quad (3-78)$$



Die Elementwerte erhält man durch Koeffizientenvergleich mit der entnormierten Übertragungsfunktion des Hochpass zweiter Ordnung. Das Vorgehen ist genau gleich wie beim Tiefpass und wir erhalten auch dieselben Resultate:

$C_1, C_3, R_5$  vorgegeben

$$R_2 = \frac{1}{2\omega_c \Omega_p Q_p} \frac{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 + 4Q_p^2 C_1 ((C_1 + C_3)(A_\infty - 1))}}{(C_1 + C_3)C_1} \quad (\text{nur pos. reelle Lsg. verwenden})$$

$$= \frac{1}{(\omega_c \Omega_p)^2 R_4 C_1 C_3} \quad (3-79)$$

$$R_4 = \frac{1}{2\omega_c \Omega_p Q_p} \frac{C_1 \mp \sqrt{C_1^2 + 4Q_p^2 C_1 ((C_1 + C_3)(A_\infty - 1))}}{C_1 C_3 (1 - A_\infty)} \quad (\text{nur pos. reelle Lsg. verwenden})$$

$$= \frac{1}{(\omega_c \Omega_p)^2 R_2 C_1 C_3}$$

$$Q_p = \frac{\sqrt{R_2 R_4 C_1 C_3}}{R_2 (C_1 + C_3) + R_4 C_3 (1 - A_\infty)}$$

$$R_6 = R_5 (A_\infty - 1)$$

### Dimensionierung Sallen-Key Hochpass

$$\Omega_p = \frac{1}{\omega_c \sqrt{R_2 R_4 C_1 C_3}}$$

Besonders einfach werden die Dimensionierungsgleichungen, wenn die Durchlassverstärkung  $A_\infty=1$  gesetzt wird:

$C_1, C_3, A_\infty = 1$  (vorgegeben)

$$R_2 = \frac{1}{\omega_c \Omega_p Q_p (C_1 + C_3)}$$

$$R_4 = \frac{Q_p (C_1 + C_3)}{\omega_c \Omega_p C_1 C_3}$$

$$Q_p = \frac{\sqrt{R_2 R_4 C_1 C_3}}{C_3 (R_2 + R_4)} \quad R_6 = 0$$

$$\Omega_p = \frac{1}{\omega_c \sqrt{R_2 R_4 C_1 C_3}}$$

### Sallen-Key Hochpass mit $A_\infty=1$ (3-80)

**Beispiel 3-34:** Tschebyscheff-Hochpass nach Sallen-Key 2. Ordnung.

Man realisiere ein Tschebyscheff-Hochpass 2. Ordnung mit Welligkeit  $A_r=1\text{dB}$  für eine Grenzfrequenz  $f_c=2000\text{Hz}$  und einer Durchlassverstärkung von  $A_{\infty\text{dB}}=2\text{dB}$ . Wählbare Kondensatoren sollen mit  $1\text{nF}$  in E12 möglichst klein gewählt werden.

**Vorgaben:**

$Q_p := 0.956520071$        $\Omega_p := 1.050004918$  (Referenz-TP Daten, aus Tabelle gelesen)  
 $f_c := 2\text{kHz}$        $C_1 := 1\text{nF}$  (Wahl)       $R_5 := 10\text{k}\Omega$  (Wahl)  
 $C_3 := 1\text{nF}$  (Wahl)       $A_{dB} := 2 - 1$       Welligkeit ist abzuziehen, damit kein Überschwinger

Dimensionierung SK 2. Ordnung bei gegebenen Kondensatorwerten C1, C3 und A > 1:

**Berechnungen:**

$\omega_c := 2 \cdot \pi \cdot f_c$        $A := 10^{0.05 A_{dB}}$  (A muss > 1 sein, sonst ist die andere Formel zur Berechnung von R4 zu verwenden!)

$\Omega_p := \frac{1}{\Omega_p}$       TP-HP Transformation des Poles

$$R_{21} := \frac{1}{2 \cdot \omega_c \cdot \Omega_p} \cdot \frac{C_1 + \sqrt{C_1^2 + 4 \cdot Q_p^2 \cdot C_1 \cdot [(C_3 + C_1) \cdot (A - 1)]}}{C_1 \cdot Q_p \cdot (C_1 + C_3)} \quad R_{21} = 51.887 \times 10^3 \Omega$$

$$R_{22} := \frac{1}{2 \cdot \omega_c \cdot \Omega_p} \cdot \frac{C_1 - \sqrt{C_1^2 + 4 \cdot Q_p^2 \cdot C_1 \cdot [(C_3 + C_1) \cdot (A - 1)]}}{C_1 \cdot Q_p \cdot (C_1 + C_3)} \quad R_{22} = -8.209 \times 10^3 \Omega$$

$$R_{41} := \frac{1}{2 \cdot \omega_c \cdot \Omega_p} \cdot \frac{C_1 - \sqrt{C_1^2 + 4 \cdot Q_p^2 \cdot C_1 \cdot [(C_3 + C_1) \cdot (A - 1)]}}{(1 - A) \cdot C_1 \cdot C_3 \cdot Q_p} \quad R_{41} = 134.557 \times 10^3 \Omega$$

$$R_{42} := \frac{1}{2 \cdot \omega_c \cdot \Omega_p} \cdot \frac{C_1 + \sqrt{C_1^2 + 4 \cdot Q_p^2 \cdot C_1 \cdot [(C_3 + C_1) \cdot (A - 1)]}}{(1 - A) \cdot C_1 \cdot C_3 \cdot Q_p} \quad R_{42} = -850.473 \times 10^3 \Omega$$

$$R_6 := (A - 1) \cdot R_5 \quad R_6 = 1.22 \times 10^3 \Omega$$

**Wahl:**       $R_2 := R_{21}$        $R_4 := R_{41}$       (Wenn  $C_4 < C_2$  nur das positive Paar wählen)

**Resultate:**

$$R_2 = 51.887 \times 10^3 \Omega \quad C_1 = 1 \times 10^{-9} \text{F} \quad R_4 = 134.557 \times 10^3 \Omega \quad C_3 = 1 \times 10^{-9} \text{F}$$

$$R_5 = 10 \times 10^3 \Omega \quad R_6 = 1.22 \times 10^3 \Omega$$

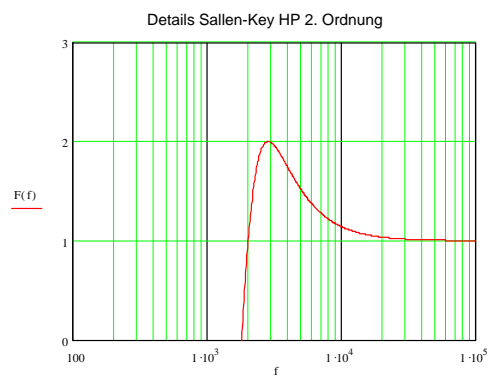
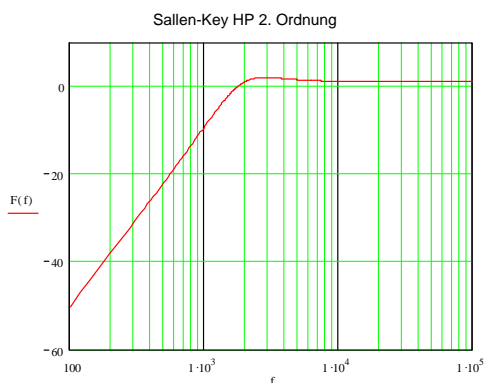
**Grafik:**       $\text{dB}(x) := 20 \cdot \log(x)$

$$G(s) := \frac{A \cdot R_2 \cdot R_4 \cdot C_1 \cdot C_3 \cdot s^2}{R_2 \cdot R_4 \cdot C_1 \cdot C_3 \cdot s^2 + [R_4 \cdot C_3 \cdot (1 - A) + R_2 \cdot C_1 + R_2 \cdot C_3] \cdot s + 1}$$

Übertragungsfunktion HP nach Sallen-Key 2. Ordnung

$$F(f) := \text{dB}(|G(j2\pi \cdot j)|)$$

$$f := 100, 120, 100000$$



**Kontrollwerte:**

$$F(f_c) = 1 \quad [\text{dB}] \quad \text{Dämpfung (Verstärkung) bei Grenzfrequenz } f_c$$

$$F(1\text{MHz}) = 1 \times 10^0 \quad [\text{dB}] \quad \text{Asymptot. Dämpfung bei hohen Frequenzen}$$

$$Q_p := \frac{\sqrt{C_1 \cdot C_3 \cdot R_2 \cdot R_4}}{R_2 \cdot (C_1 + C_3) + C_3 \cdot R_4 \cdot (1 - A)} \quad Q_p = 956.52 \times 10^{-3} \quad \text{Polgüte}$$

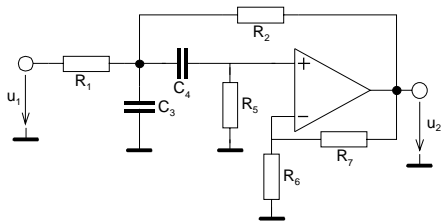
$$\Omega_p := \frac{1}{\omega_c \sqrt{C_1 \cdot C_3 \cdot R_2 \cdot R_4}} \quad \Omega_p = 952.376 \times 10^{-3} \quad \text{Normierte Polfrequenz Hochpass}$$

**Bild 3-88:** Berechnung und Amplitudengang des Hochpass 2. Ordnung nach Beispiel 3-34.

### 3.13.3.4 Bandpass

Bandpass Schaltungen mit Einfach-Mitkopplung nach Sallen-Key sind möglich. Sie hat gemäss [LAN94] zwar den Vorteil, dass auch für tiefere Frequenzen kleine Kapazitätswerte benutzt werden können. Gravierende Nachteile sind aber die schlechte Abgleichbarkeit und die hohen Anforderungen an den Operationsverstärker.

Das Bandpassglied 2. Ordnung nach Sallen-Key hat gegenüber den TP- und HP-Schaltungen ein zusätzliches Element, hier  $C_3$ :



**Bild 3-89:** Bandpass 2. Ordnung nach Sallen-Key mit Verstärkung  $A_M > 1$ .

Die Übertragungsfunktion wird:

$$G(s) = \frac{\frac{R_2 R_5}{R_1 + R_2} C_4 A_M \cdot s}{1 + \frac{R_1 R_5 C_4 (1 - A_M) + R_1 R_2 (C_3 + C_4) + R_2 R_5 C_4}{R_1 + R_2} \cdot s + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} R_5 C_3 C_4 \cdot s^2} \quad (3-81)$$

$$A_M = 1 + \frac{R_7}{R_6}$$

Die Elementwerte der Widerstände bei gegebenen Kondensatorwerten, Polgüte und Polfrequenz werden mit einem Koeffizientenvergleich mit der entnormierten Bandpass-Übertragungsfunktion:

$$\frac{A_M \frac{1}{\omega_p Q_p} s}{1 + \frac{1}{\omega_p Q_p} s + \frac{1}{\omega_p^2} s^2} = \frac{\frac{R_2 R_5}{R_1 + R_2} C_4 A_M \cdot s}{1 + \frac{R_1 R_5 C_4 (1 - A_M) + R_1 R_2 (C_3 + C_4) + R_2 R_5 C_4}{R_1 + R_2} \cdot s + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} R_5 C_3 C_4 \cdot s^2} \quad (3-82)$$

*Koeffizientenvergleich:*

$$A_M \frac{1}{\omega_p Q_p} = \frac{R_2 R_5}{R_1 + R_2} C_4 A_M$$

$$\frac{1}{\omega_p Q_p} = \frac{R_1 R_5 C_4 (1 - A_M) + R_1 R_2 (C_3 + C_4) + R_2 R_5 C_4}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{1}{\omega_p^2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Die Lösungen für  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_5$  und  $\Omega_p Q_p$  werden:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \frac{Q_P}{\omega_P C_3} & \omega_P &= \omega_M \Omega_{PB} \\
 R_2 &= \frac{1}{2} \frac{C_3 (A_M - 1) + \sqrt{C_3 (C_3 (1 - 2A_M + A_M^2) + 4Q_P^2 (C_3 + C_4) (A_M - 1))}}{\omega_P Q_P C_3 (C_3 + C_4)} \\
 R_5 &= \frac{C_3 (A_M - 1) + \sqrt{C_3 (C_3 (1 - 2A_M + A_M^2) + 4Q_P^2 (C_3 + C_4) (A_M - 1))} + 2Q_P^2 (C_3 + C_4)}{\omega_P Q_P C_4 \left[ C_3 (A_M - 1) + \sqrt{C_3 (C_3 (1 - 2A_M + A_M^2) + 4Q_P^2 (C_3 + C_4) (A_M - 1))} \right]} \\
 Q_P &= \frac{\sqrt{R_1 R_2 R_5 C_3 C_4} \sqrt{R_1 + R_2}}{R_1 R_2 (C_3 + C_4) + R_1 R_5 C_4 (1 - A_M) + R_2 R_5 C_4} \\
 \Omega_P &= \frac{\sqrt{R_1 + R_2}}{\omega_M \sqrt{R_1 R_2 R_5 C_3 C_4}}
 \end{aligned} \tag{3-83}$$

Bandpässe nach Sallen-Key müssen eine Mittenverstärkung  $A_M > 1$  haben. Bei  $A_M = 1$  würde  $R_2 = 0$  und  $R_5 \rightarrow \infty$ . Dies ist in der Praxis keine Einschränkung, da bei mehrstufigen Bandpässen durch den Stufenkorrekturfaktor sowieso eine Verstärkung  $A_K * A_M > 1$  gefordert wird. Bei einstufiger Realisation mit einem  $A \leq 1$  kann  $R_1$  als Spannungsteiler ausgebildet werden womit alle möglichen Fälle abgedeckt sind (vgl. auch Beispiel 3-35).

### Beispiel 3-35: Bandpass nach Sallen-Key 2. Ordnung

Man realisiere einen Bandpass 2. Ordnung, der bei den Grenzfrequenzen  $f_{ci} = 1000 \text{ Hz}$  und  $f_{cz} = 1100 \text{ Hz}$  eine Dämpfung von 1 dB aufweist. Die Mittenfrequenzdämpfung soll 0 dB betragen.

#### Lösung:

Da die Grenzfrequenzdämpfungen mit -1 dB vorgegeben sind und das Filter 2. Ordnung aufweist, wählt man am einfachsten ein Tschebyscheff Referenz-Tiefpass mit Welligkeit 1 dB. Die Grenzfrequenz fällt immer mit der Welligkeit zusammen. (Bemerkung: Die Welligkeit fällt hier nicht ins Gewicht, da der TP 1. Ordnung keine Welligkeit hat.)

Weil das Sallen-Key Grundglied eine Durchlassverstärkung fordert, wird eine Durchlassverstärkung von  $A_M = 2$  gewählt. Diese wird mit einem Spannungsteiler am Eingang wieder kompensiert. Es entsteht so gesamthaft eine Mittenfrequenzdämpfung von 0 dB. Der Spannungsteiler wird durch Aufteilung des Widerstandes  $R_1$  realisiert.

**Vorgaben:**

$f_{C1} := 100\text{Hz}$        $f_{C2} := 110\text{Hz}$        $A_M := 2$  (gewählte Verstärkung bei Mittenfrequenz)  
 $n := 1$        $A_{\text{rdB}} := 1$

**Berechnungen:**

$f_M := \sqrt{f_{C1} \cdot f_{C2}}$        $f_M = 1.04881 \times 10^3 \text{ Hz}$   
 $\Omega_{C1} := \frac{f_{C1}}{f_M}$        $\Omega_{C1} = 0.953$   
 $\Omega_{C2} := \frac{f_M}{f_{C2}}$        $\Omega_{C2} = 1.049$

**BP-TP Transformation** für Bestimmung Referenz Tiefpass:

$D := \frac{1}{\Omega_{C2} - \Omega_{C1}}$        $D = 10.488$

$m := 0..n - 1$

**Bestimmung Tschebyscheff-Pole** der Ordnung n:

$\varepsilon := \sqrt{10^{\frac{0.1 A_{\text{rdB}}}{n}} - 1}$        $\varepsilon = 0.509$

$S_{PT_m} := -\sin\left(\frac{1+2m}{2n}\pi\right) \cdot \sinh\left(\frac{1}{n} \cdot \text{arsinh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) + j \cdot \cos\left(\frac{1+2m}{2n}\pi\right) \cdot \cosh\left(\frac{1}{n} \cdot \text{arsinh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$

$\Omega_{PT_m} := |S_{PT_m}|$        $S_{PT} = (-1.965)$       Normierter Pol Tschebyscheff Referenz Tiefpass

**Tiefpass-Bandpass Transformation**

$S_{PB_{2m}} := \frac{S_{PT_m}}{2D} + \frac{\sqrt{(S_{PT_m})^2 - 4D^2}}{2D}$       Konjugiert komplexe normierte Bandpass Pole

$S_{PB_{2m+1}} := \frac{S_{PT_m}}{2D} - \frac{\sqrt{(S_{PT_m})^2 - 4D^2}}{2D}$       Bandpass Polgüte      Normierte Bandpass Polfrequenz       $S_{PB} = \begin{pmatrix} -0.094 - 0.996j \\ -0.094 + 0.996j \end{pmatrix}$

Normierte Pollagen von Tschebyscheff Bandpass der Ordnung 2n.

$k := 0..n - 1$

$\Omega_{PB_k} := |S_{PB_k}|$        $Q_{PB_k} := \frac{-\Omega_{PB_k}}{2 \cdot \text{Re}(S_{PB_k})}$        $Q_{PB} = (5.33683)$        $\Omega_{PB} = (1)$

**Stufenverstärkungskorrekturfaktor:**

$A_{K_k} := \frac{1}{D} \cdot \Omega_{PT_k} \cdot Q_{PB_k} \cdot A_M$        $A_K = (2)$       Stufenverstärkungskorrekturfaktor für jedes Bandpass Teilfilter

**Dimensionierung der SK-Bandpassfilters.** C3, C4, R6 sind vorgegeben.

$C_3 := 10\text{nF}$        $C_4 := 10\text{nF}$        $R_6 := 10\text{k}\Omega$

$Q_P := Q_{PB_0}$        $\Omega_P := \Omega_{PB_0}$        $A_M := A_{K_0}$

$\omega_M := 2\pi \cdot f_M$        $\omega_M = 6.59 \times 10^3 \text{ Hz}$

$R_1 := \frac{Q_P}{\Omega_P \cdot \omega_M \cdot C_3}$        $R_1 = 8.099 \times 10^4 \Omega$

$R_2 := \frac{1}{2} \cdot \frac{C_3 \cdot (A_M - 1) + \sqrt{C_3 \cdot [C_3 \cdot (1 - 2 \cdot A_M + A_M^2) + 4 \cdot Q_P^2 \cdot (C_3 + C_4) \cdot (A_M - 1)]}}{Q_P \cdot C_3 \cdot (C_3 + C_4) \cdot \omega_M \cdot \Omega_P}$        $R_2 = 1.14646 \times 10^4 \Omega$

$R_5 := \frac{C_3 \cdot (A_M - 1) + \sqrt{C_3 \cdot [C_3 \cdot (1 - 2 \cdot A_M + A_M^2) + 4 \cdot Q_P^2 \cdot (C_3 + C_4) \cdot (A_M - 1)]} + 2 \cdot Q_P^2 \cdot (C_3 + C_4)}{Q_P \cdot C_4 \cdot \omega_M \cdot \Omega_P \cdot [C_3 \cdot (A_M - 1) + \sqrt{C_3 \cdot [C_3 \cdot (1 - 2 \cdot A_M + A_M^2) + 4 \cdot Q_P^2 \cdot (C_3 + C_4) \cdot (A_M - 1)]}]}$        $R_5 = 2.293 \times 10^4 \Omega$

**Grafik:**

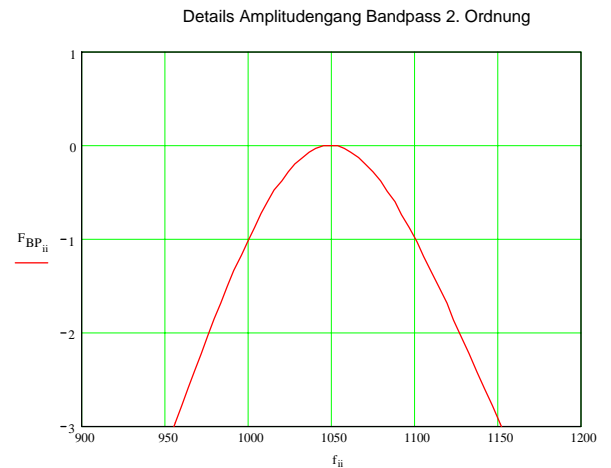
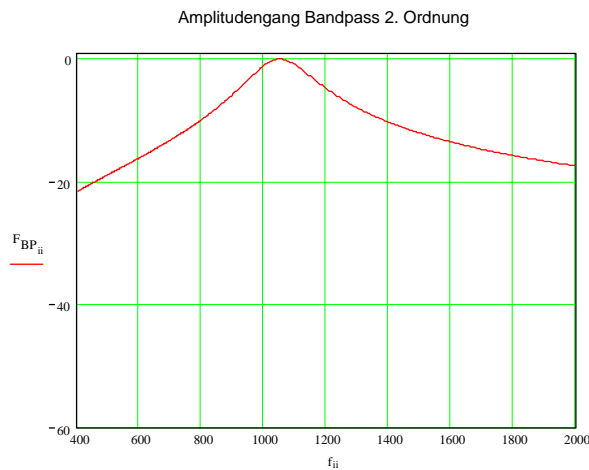
f := logrange (400, 2000, 400) Hz

ii := 0.. letzte(f)

$$G(s) := \frac{R_{1B}}{R_{1B} + R_{1A}} \cdot \frac{\frac{R_5 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot A_M \cdot s \cdot C_4}{1 + \left[ \frac{R_1 \cdot R_5 \cdot C_4 (1 - A_M) + R_1 \cdot R_2 \cdot (C_3 + C_4) + R_2 \cdot R_5 \cdot C_4}{R_1 + R_2} \right] \cdot s + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot R_5 \cdot C_3 \cdot C_4 \cdot s^2}$$

Übertragungsfunktion Bandpass  
2. Ordnung nach Sallen-Key mit  
Berücksichtigung des Eingangspannungsteilers

$$F_{BP_{ii}} := dB(|G(2\pi \cdot f_{ii} \cdot j)|)$$



**Kontrollwerte:**

$$Q_{PB} := \frac{\sqrt{R_1 \cdot R_2 \cdot R_5 \cdot C_3 \cdot C_4} \cdot \sqrt{R_1 + R_2}}{R_1 \cdot R_2 \cdot (C_3 + C_4) + R_1 \cdot R_5 \cdot C_4 \cdot (1 - A_M) + R_2 \cdot R_5 \cdot C_4}$$

$$Q_{PB} = 5.337$$

$$f_{PB} := \frac{\sqrt{R_1 + R_2}}{2\pi \sqrt{R_1 \cdot R_2 \cdot R_5 \cdot C_3 \cdot C_4}}$$

$$f_{PB} = 1.049 \times 10^3 \text{ Hz}$$

$$\Omega_{PB} := 1$$

$$\Delta\Omega_{3dB} := \frac{\Omega_{PB}}{Q_{PB}} \quad (\text{Weil } f_{PB} = f_M \text{ bei 2. Ordnung})$$

$$\Delta\Omega_{3dB} = 0.187$$

$$f_{3dB1} := \left( \frac{\Delta\Omega_{3dB}}{2} + \sqrt{\frac{\Delta\Omega_{3dB}^2}{4} + 4} \right) \cdot f_{PB}$$

$$f_{3dB1} = 1.152 \times 10^3 \text{ Hz}$$

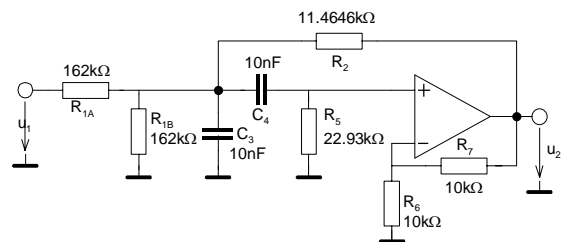
$$f_{3dB2} := \left( \frac{-\Delta\Omega_{3dB}}{2} + \sqrt{\frac{\Delta\Omega_{3dB}^2}{4} + 4} \right) \cdot f_{PB}$$

$$f_{3dB2} = 955.14 \text{ Hz}$$

$$dB(|G(2\pi \cdot j \cdot f_{C1})|) = -1 \quad \text{Dämpfung bei Grenzfrequenz } f_{C1}$$

$$dB(|G(2\pi \cdot j \cdot f_{C2})|) = -1 \quad \text{Dämpfung bei Grenzfrequenz } f_{C2}$$

$$dB(|G(2\pi \cdot j \cdot f_M)|) = 0 \quad \text{Dämpfung bei Mittenfrequenz } f_M$$



**Bild 3-90:** Dimensionierung, berechneter Amplitudengang und Detailschema zum Sallen-Key Bandpass 2. Ordnung nach Beispiel 3-35

### Beispiel 3-36: Bestimmung -3.01dB Frequenzen

Man bestimme für den Bandpass die normiert n und entnormierten -3dB Frequenzen und zwar ausschliesslich aus den gegebenen Komponentenwerten.

#### Lösung:

Man bestimmt zuerst Polfrequenz und Polgüte. Daraus kann man die -3dB Frequenzen aus dem allgemeinen Zusammenhang  $\Delta\Omega_{3dB} = \frac{\Omega_{PB}}{Q_{PB}}$  und der resultierenden quadratischen

Gleichung die Frequenzen mit quadratischer Ergänzung lösen:

Vorgaben:

$$\begin{aligned} R_1 &:= 80.99k\Omega & R_2 &:= 11.4646k\Omega & R_5 &:= 22.93k\Omega \\ C_3 &:= 10nF & C_4 &:= 10nF \\ R_6 &:= 10k\Omega & R_7 &:= 10k\Omega \end{aligned}$$

Berechnungen:

$$A_M := 1 + \frac{R_7}{R_6} \quad A_M = 2 \quad \text{Verstärkung bei Mittenfrequenz}$$

$$Q_{PB} := \frac{\sqrt{R_1 \cdot R_2 \cdot R_5 \cdot C_3 \cdot C_4} \cdot \sqrt{R_1 + R_2}}{[R_1 \cdot R_2 \cdot (C_3 + C_4) + R_1 \cdot R_5 \cdot C_4 \cdot (1 - A_M) + R_2 \cdot R_5 \cdot C_4]} \quad Q_{PB} = 5.338 \quad \text{Polgüte}$$

$$f_{PB} := \frac{\sqrt{R_1 + R_2}}{2\pi \cdot \sqrt{R_1 \cdot R_2 \cdot R_5 \cdot C_3 \cdot C_4}} \quad f_{PB} = 1.049 \times 10^3 \text{ Hz} \quad \text{Polfrequenz des Bandpass (Hier auch Mittenfrequenz)}$$

$$\Omega_{PB} := 1 \quad (\text{Weil } f_{PB} = f_M \text{ bei 2. Ordnung})$$

$$\Delta\Omega_{3dB} := \frac{\Omega_{PB}}{Q_{PB}} \quad \Delta\Omega_{3dB} = 0.187 \quad \text{Normierte -3dB Bandbreite}$$

$$f_{3dB1} := \left( \frac{\Delta\Omega_{3dB}}{2} + \sqrt{\frac{\Delta\Omega_{3dB}^2}{4} + 4} \right) \cdot f_{PB} \quad f_{3dB1} = 1.152 \times 10^3 \text{ Hz} \quad \text{Entnormierte -3dB Frequenzen}$$

$$f_{3dB2} := \left( \frac{-\Delta\Omega_{3dB}}{2} + \sqrt{\frac{\Delta\Omega_{3dB}^2}{4} + 4} \right) \cdot f_{PB} \quad f_{3dB2} = 955.145 \text{ Hz}$$

$$\Omega_{3dB1} := \frac{\Delta\Omega_{3dB}}{2} + \sqrt{\frac{\Delta\Omega_{3dB}^2}{4} + 4} \quad \Omega_{3dB1} = 1.098 \quad \text{Normierte -3dB Frequenzen}$$

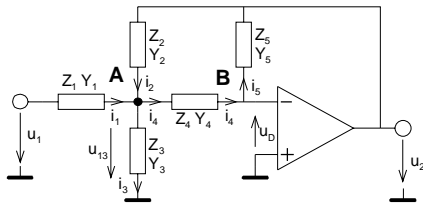
$$\Omega_{3dB2} := \frac{-\Delta\Omega_{3dB}}{2} + \sqrt{\frac{\Delta\Omega_{3dB}^2}{4} + 4} \quad \Omega_{3dB2} = 0.911$$

### 3.13.4 Mehrfach-Gegenkopplung

Sie verkörpert eine weitere verbreitete Grundschaltung. Im Gegensatz zu Sallen-Key wird das Signal hier invertiert ebenso sind auch Verstärkungen  $A < 1$  möglich. Die erreichbare Polgüte ist aber nach Aussagen in [HER84] kleiner und wird nur für  $Q_p < 5$  empfohlen.

#### 3.13.4.1 Grundschaltung

Aus der allgemeinen Grundschaltung in Impedanz oder Admittanzdarstellung wird durch geeignete Wahl TP-, HP- oder BP Charakteristik erreicht.



**Bild 3-91:** Schaltung für quadratisches Teilfilter mit Mehrfach-Gegenkopplung.  
Je nach Wahl der Elemente für die Impedanzen/ Admittanzen können TP, HP oder BP realisiert werden.

Die allgemeine Übertragungsfunktion wird nach Lösen des Gleichungssystems für die Knoten A und B:

$$A: \frac{u_1 - u_{13}}{Z_1} + \frac{u_2 - u_{13}}{Z_2} = \frac{u_{13}}{Z_3} + \frac{u_{14} - u_D}{Z_4}$$

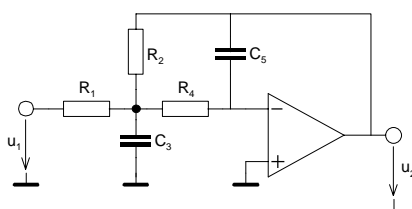
$$B: \frac{u_{14}}{Z_4} = \frac{-u_D - u_2}{Z_5} \quad \text{OpAmp ideal} \rightarrow u_D = 0$$

$$G(s) := \frac{u_2}{u_1} = \frac{-Z_5 Z_2 Z_3}{Z_2 Z_3 Z_4 + Z_1 Z_3 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_5 Z_1 Z_3 + Z_1 Z_2 Z_3} = \frac{-Y_4 Y_1}{Y_1 Y_5 + Y_2 Y_5 + Y_3 Y_5 + Y_2 Y_4 + Y_4 Y_5} \quad (3-84)$$

Die Definition der Übertragungscharakteristik erfolgt durch geeignetes Einsetzen von Widerständen und Kondensatoren bei den Admittanzen. (Bei der Admittanzdarstellung wird die entstehende Übertragungsfunktion direkt ersichtlich.)

#### 3.13.4.2 Tiefpass

Man erhält ein Tiefpassglied, wenn  $Y_1 = \frac{1}{R_1}, Y_2 = \frac{1}{R_2}, Y_3 = sC_3, Y_4 = \frac{1}{R_4}, Y_5 = sC_5$ .



**Bild 3-92:** Tiefpass 2. Ordnung mit Mehrfach-Gegenkopplung.

$$G(s) = \frac{-R_2}{R_1 R_2 R_4 C_5 C_3 s^2 + (R_2 R_4 C_5 + R_1 R_4 C_5 + R_1 R_2 C_5) s + R_1} = \frac{A}{R_2 R_4 C_5 C_3 s^2 + (R_4 C_5 (1 - A) + R_2 C_5) s + 1} \quad (3-85)$$

$$A = -\frac{R_2}{R_1}$$



Die Dimensionierungsgleichungen werden mit einem Koeffizientenvergleich mit der entnormierten Tiefpass Übertragungsfunktion 2. Ordnung:

$$\frac{A}{\frac{1}{\omega_p^2} s^2 + \frac{1}{\omega_p Q_p} s + 1} = \frac{A}{R_2 R_4 C_5 C_3 s^2 + (R_4 C_5 (1-A) + R_2 C_5) s + 1} \quad (3-86)$$

$$A = -\frac{R_2}{R_1}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\frac{1}{\omega_p^2} = R_2 R_4 C_5 C_3$$

$$\frac{1}{\omega_p Q_p} = R_4 C_5 (1-A) + R_2 C_5$$

Da nur die Lösung für  $R_p$ ,  $R_2$ ,  $R_4$  bei gegebenen Kondensatorwerten sinnvoll ist, erhalten wir:

$$R_2 = \frac{1}{2\omega_c \Omega_p Q_p} \cdot \frac{C_3 \pm \sqrt{C_3^2 - 4Q_p^2 C_3 C_5 (1-A_0)}}{C_3 C_5} \quad (A_0 \text{ ist immer negativ}) \quad (3-87)$$

$$= \frac{1}{(\omega_c \Omega_p)^2 C_3 C_5 R_4}$$

$$R_1 = \frac{R_2}{-A_0}$$

$$R_4 = \frac{-1}{2\omega_c \Omega_p Q_p} \cdot \frac{C_3 \mp \sqrt{C_3^2 - 4Q_p^2 C_3 C_5 (1-A_0)}}{C_3 C_5 (A_0 - 1)}$$

$$= \frac{1}{(\omega_c \Omega_p)^2 C_3 C_5 R_2}$$

$$Q_p = \frac{R_1 \sqrt{R_2 R_4 C_5 C_3}}{C_5 (R_2 R_4 + R_1 R_4 + R_1 R_2)} = \frac{\sqrt{R_2 R_4 C_5 C_3}}{R_4 C_5 (1-A_0) + R_2 C_5}$$

$$\Omega_p = \frac{1}{\omega_c \sqrt{R_2 R_4 C_5 C_3}}$$

den Spezialfall für  $A_0 = -1$  sieht man sofort und wird hier nicht weiter diskutiert.

**Beispiel 3-37:** MGK-Tiefpass 2. Ordnung mit  $A_0 = -20\text{dB}$ .

Man realisiere einen Butterworth-Tiefpass mit einer Anfangsdämpfung von  $A_0 = -20\text{dB}$ , Grenzfrequenz  $f_c = 1\text{kHz}$ . Wählbare Kondensatoren sind mit  $10\text{nF}$  beginnend kleinstmöglich in E3 zu wählen.

**Lösung:**

**Vorgaben:**

$$Q_P := \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Omega_P := 1.00 \quad (\text{Aus Tabelle gelesen für Butterworth-TP})$$

$$f_C := 1\text{kHz} \quad C_3 := 10\text{nF} \quad A_{0\text{dB}} := -20 \quad \text{Anfangsdämpfung}$$

Dimensionierungsformeln MGK 2.Ordnung bei gegebenen Kondensatorwerten C3,C5:

**Berechnungen:**

$$A_0 := -10^{0.05 \cdot A_{0\text{dB}}} \quad A_0 = -100 \times 10^{-3}$$

$$\text{Bedingung: } C_{3\text{min}} := 4Q_P^2 \cdot C_5 \cdot (1 - A_0) \quad C_{3\text{min}} = 22 \times 10^{-9} \text{ F} \quad C_3 := 47\text{nF} \quad (\text{Wahl})$$

$$\omega_C := 2 \cdot \pi \cdot f_C$$

$$R_{21} := \frac{1}{2 \cdot \omega_C \cdot \Omega_P \cdot Q_P} \cdot \frac{C_3 + \sqrt{C_3^2 - 4 \cdot Q_P^2 \cdot C_3 \cdot C_5 \cdot (1 - A_0)}}{C_3 \cdot C_5} \quad R_{21} = 19.462 \times 10^3 \Omega$$

$$R_{22} := \frac{1}{2 \cdot \omega_C \cdot \Omega_P \cdot Q_P} \cdot \frac{C_3 - \sqrt{C_3^2 - 4 \cdot Q_P^2 \cdot C_3 \cdot C_5 \cdot (1 - A_0)}}{C_3 \cdot C_5} \quad R_{22} = 3.046 \times 10^3 \Omega$$

$$R_{41} := \frac{-1}{2 \cdot \omega_C \cdot \Omega_P \cdot Q_P} \cdot \frac{C_3 - \sqrt{C_3^2 - 4 \cdot Q_P^2 \cdot C_3 \cdot C_5 \cdot (1 - A_0)}}{C_3 \cdot C_5 \cdot (A_0 - 1)} \quad R_{41} = 2.769 \times 10^3 \Omega$$

$$R_{42} := \frac{-1}{2 \cdot \omega_C \cdot \Omega_P \cdot Q_P} \cdot \frac{C_3 + \sqrt{C_3^2 - 4 \cdot Q_P^2 \cdot C_3 \cdot C_5 \cdot (1 - A_0)}}{C_3 \cdot C_5 \cdot (A_0 - 1)} \quad R_{42} = 17.692 \times 10^3 \Omega$$

Alternative:

$$R_4 := \frac{1}{(\omega_C \cdot \Omega_P)^2 \cdot C_3 \cdot C_5 \cdot R_2}$$

**Wahl:**

$$R_2 := R_{21} \quad R_4 := R_{41} \quad (\text{Pos. Paar wählen (R21-R41 oder R22-R42)})$$

$$R_1 := \frac{R_2}{-A_0} \quad R_1 = 194.617 \times 10^3 \Omega$$

**Resultate:**

$$R_1 = 194.617 \times 10^3 \Omega \quad R_2 = 19.462 \times 10^3 \Omega \quad R_4 = 2.769 \times 10^3 \Omega$$

$$C_3 = 47 \times 10^{-9} \text{ F} \quad C_5 = 10 \times 10^{-9} \text{ F}$$

Vektor mit N logarithmisch  
distanzierten Elementen zwischen  
 $x_{\text{start}}$  und  $x_{\text{end}}$

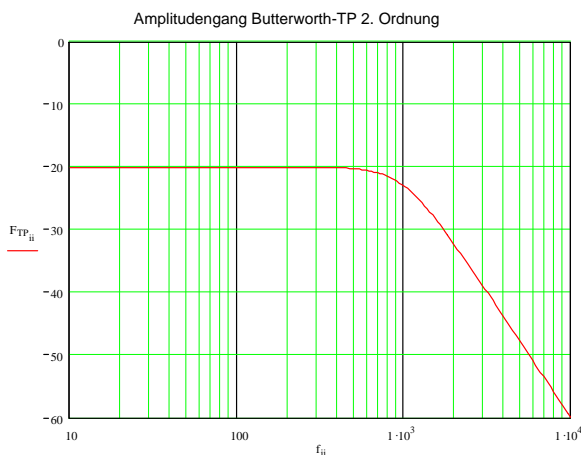
$$\text{logrange}(x_{\text{start}}, x_{\text{end}}, N) := \begin{cases} a_{N-1} \leftarrow x_{\text{end}} \\ g \leftarrow \sqrt[N-1]{\frac{x_{\text{end}}}{x_{\text{start}}}} \\ \text{for } i \in 0..N-2 \\ a_i \leftarrow x_{\text{start}} \cdot g^i \\ a \end{cases}$$

**Grafik:**

$$f := \text{logrange}(10, 10000.200) \text{ Hz} \quad \text{ii} := 0.. \text{letzte}(f)$$

$$G(s) := \frac{A_0}{R_2 \cdot R_4 \cdot C_3 \cdot C_5 \cdot s^2 + [R_2 \cdot C_5 + R_4 \cdot C_5 \cdot (1 - A_0)] \cdot s + 1}$$

$$F_{\text{TP}_{\text{ii}}} := \text{dB}(|G(2\pi \cdot j \cdot f_{\text{ii}})|)$$



**Kontrollwerte:**

$$\text{dB}(|G(2\pi \cdot j \cdot 0\text{Hz})|) = -20 \times 10^0 \quad \text{Anfangsdämpfung}$$

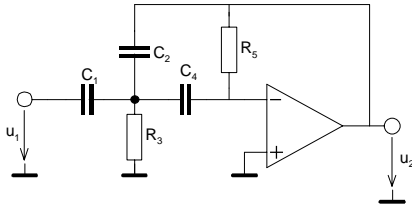
$$\text{dB}(|G(2\pi \cdot j \cdot f_C)|) = -23.01 \times 10^0 \quad \text{Dämpfung bei Grenzfrequenz}$$

$$\Omega_{\text{TP}} := \frac{1}{\omega_C \sqrt{R_2 \cdot R_4 \cdot C_3 \cdot C_5}} \quad \Omega_{\text{TP}} = 1000 \times 10^{-3} \quad \text{Normierte Polfrequenz}$$

$$Q_{\text{TP}} := \frac{\sqrt{R_2 \cdot R_4 \cdot C_3 \cdot C_5}}{R_4 \cdot C_5 \cdot (1 - A_0) + R_2 \cdot C_5} \quad Q_{\text{TP}} = 707.107 \times 10^{-3} \quad \text{Polgüte}$$

### 3.13.4.3 Hochpass

Das Hochpassglied 2. Ordnung erhält man mit  $Y_1 = \frac{1}{R_1}, Y_2 = \frac{1}{R_2}, Y_3 = sC_3, Y_4 = \frac{1}{R_4}, Y_5 = sC_5$ .



**Bild 3-93:** Hochpass 2. Ordnung mit Mehrfach-Gegenkopplung.

$$G(s) = \frac{-R_3 R_5 C_1 C_4 s^2}{R_3 R_5 C_2 C_4 s^2 + (R_3 (C_1 + C_2 + C_4))s + 1} = \frac{A_\infty R_3 R_5 C_2 C_4 s^2}{R_3 R_5 C_2 C_4 s^2 + (R_3 C_2 (1 - A_\infty) + R_3 C_4)s + 1} \quad (3-88)$$

$$A_\infty = -\frac{C_1}{C_2}$$

Die Dimensionierungsgleichungen werden daraus mit Koeffizientenvergleich:

$$R_3 = \frac{1}{\omega_p Q_p (C_2 (1 - A_\infty) + C_4)} \quad C_1 = \frac{C_2}{-A_\infty} \quad \omega_p = \omega_c \Omega_p \quad (3-89)$$

$$R_5 = \frac{Q_p (C_2 (1 - A_\infty) + C_4)}{C_2 C_4 \omega_p}$$

$$Q_p = \frac{\sqrt{R_3 R_5 C_2 C_4}}{R_3 C_2 (1 - A_\infty) + R_3 C_4} = \frac{\sqrt{R_3 R_5 C_2 C_4}}{R_3 (C_1 + C_2 + C_4)}$$

$$f_p = \frac{1}{2\pi \sqrt{R_3 R_5 C_2 C_4}}$$

Ein Nachteil dieser Schaltung ist die schlechte Einstellbarkeit der Endverstärkung über das Kapazitätsverhältnis  $C_2/C_1$ . Für  $C_1=C_2=C_4$  wird die Endverstärkung  $A_\infty=1$  und der Formelsatz vereinfacht sich nochmals etwas.

#### **Beispiel 3-38:** MGK-Hochpass 2. Ordnung mit $A_0=+6\text{dB}$

Man realisiere einen Butterworth-Hochpass mit einer Endverstärkung von  $A_\infty=+6\text{dB}$ , Grenzfrequenz  $f_c=700\text{Hz}$ . Der Kondensator  $C_2$  soll  $10\text{nF}$ ,  $C_4$  soll  $22\text{nF}$  betragen.

#### **Lösung:**

**Vorgaben:**

$$Q_P := \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Omega_P := 1.00 \quad (\text{Aus Tabelle gelesen für Butterworth-TP})$$

$$f_C := 70 \text{ Hz} \quad C_2 := 10 \text{ nF} \quad A_{\text{INFdB}} := 6 \quad \text{Enddämpfung (Verstärkung)}$$

$$C_4 := 22 \text{ nF}$$

Dimensionierungsformeln MGK 2.Ordnung bei gegebenen Kondensatorwerten C2,C4::

**Berechnungen:**

$$A_{\text{INF}} := -10^{0.05 \cdot A_{\text{INFdB}}} \quad A_{\text{INF}} = -1.995 \times 10^0$$

$$\omega_C := 2 \cdot \pi \cdot f_C$$

$$\Omega_P := \frac{1}{\Omega_P} \quad \text{TP-HP Transformation}$$

$$C_1 := \frac{C_2}{-A_{\text{INF}}}$$

$$R_3 := \frac{1}{\omega_C \cdot \Omega_P \cdot Q_P \cdot [C_2 \cdot (1 - A_{\text{INF}}) + C_4]} \quad R_3 = 6.189 \times 10^3 \Omega$$

$$R_5 := \frac{Q_P \cdot [C_2 \cdot (1 - A_{\text{INF}}) + C_4]}{\omega_C \cdot \Omega_P \cdot C_2 \cdot C_4} \quad R_5 = 37.966 \times 10^3 \Omega$$

**Resultate:**

$$C_1 = 5.012 \times 10^{-9} \text{ F} \quad C_2 = 10 \times 10^{-9} \text{ F} \quad C_4 = 22 \times 10^{-9} \text{ F}$$

$$R_3 = 6.189 \times 10^3 \Omega \quad R_5 = 37.966 \times 10^3 \Omega$$

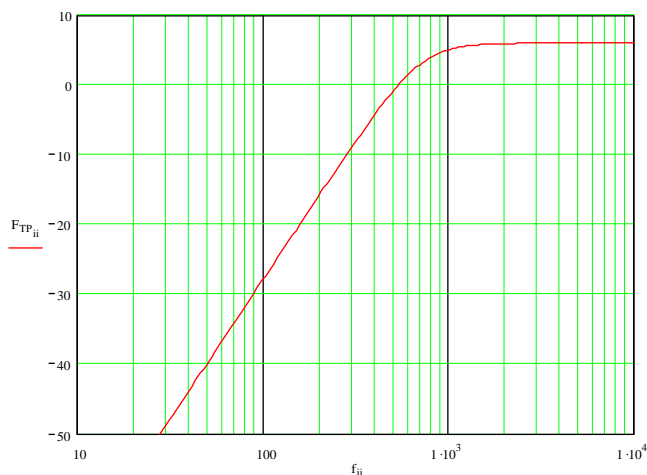
**Grafik:**

$$f := \text{logrange}(10, 10000, 200) \text{ Hz} \quad ii := 0.. \text{letzte}(f)$$

$$G(s) := \frac{A_{\text{INF}} \cdot R_3 \cdot R_5 \cdot C_2 \cdot C_4 \cdot s^2}{R_3 \cdot R_5 \cdot C_2 \cdot C_4 \cdot s^2 + [R_3 \cdot C_4 + R_3 \cdot C_2 \cdot (1 - A_{\text{INF}})] \cdot s + 1} \quad \text{Übertragungsfunktion MGK-HP 2. Ordnung}$$

$$F_{\text{TP}_{ii}} := \text{dB}(|G(2\pi \cdot j \cdot f_{ii})|)$$

Amplitudengang Butterworth-HP 2. Ordnung



**Kontrollwerte:**

$$\text{dB}(|G(2\pi \cdot j \cdot 10^7 \text{ Hz})|) = 6 \times 10^0 \quad \text{Enddämpfung}$$

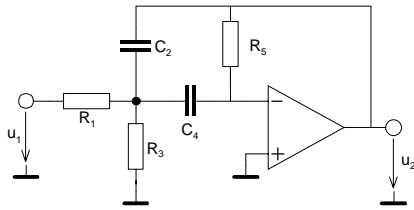
$$\text{dB}(|G(2\pi \cdot j \cdot f_C)|) = 2.99 \times 10^0 \quad \text{Dämpfung bei Grenzfrequenz}$$

$$\Omega_{\text{HP}} := \frac{1}{\omega_C \sqrt{R_3 \cdot R_5 \cdot C_2 \cdot C_4}} \quad \Omega_{\text{HP}} = 1 \times 10^0 \quad \text{Normierte Polfrequenz HP}$$

$$Q_{\text{HP}} := \frac{\sqrt{R_3 \cdot R_5 \cdot C_2 \cdot C_4}}{R_3 \cdot C_2 \cdot (1 - A_{\text{INF}}) + R_3 \cdot C_4} \quad Q_{\text{HP}} = 707.107 \times 10^{-3} \quad \text{Polgüte}$$

### 3.13.4.4 Bandpass

Man erhält ein Bandpassglied, wenn  $Y_1 = \frac{1}{R_1}, Y_2 = sC_2, Y_3 = \frac{1}{R_3}, Y_4 = sC_4, Y_5 = \frac{1}{R_5}$ .



**Bild 3-94:** Bandpass 2. Ordnung mit Mehrfach-Gegenkopplung.

Man findet durch Einsetzen in die allgemeine Übertragungsfunktion des MGK-Gliedes und etwas Umformen:

$$G(s) = \frac{\frac{-R_3 R_5}{R_1 + R_3} C_4 s}{1 + s \left( \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} (C_2 + C_4) \right) + \frac{R_1 R_3 R_5}{R_1 + R_3} C_2 C_4 s^2} \quad (3-90)$$

Der Koeffizientenvergleich mit der entnormierten Bandpass Übertragungsfunktion ergibt das Gleichungssystem:

$$\frac{A_M \frac{1}{Q_{PB} \omega_{PB}} s}{1 + \frac{1}{Q_{PB} \omega_{PB}} s + \frac{1}{\omega_{PB}^2} s^2} = \frac{\frac{-R_3 R_5}{R_1 + R_3} C_4 s}{1 + s \left( \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} (C_2 + C_4) \right) + \frac{R_1 R_3 R_5}{R_1 + R_3} C_2 C_4 s^2} \quad (3-91)$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} A_M \frac{1}{Q_{PB} \omega_{PB}} &= \frac{-R_3 R_5}{R_1 + R_3} C_4 \\ \frac{1}{Q_{PB} \omega_{PB}} &= \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} (C_2 + C_4) \\ \frac{1}{\omega_{PB}^2} &= \frac{R_1 R_3 R_5}{R_1 + R_3} C_2 C_4 \end{aligned}$$

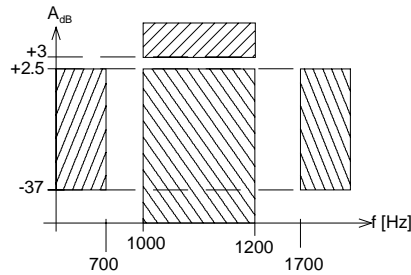
Die Auflösung erfolgt nach den Widerständen  $R_1$ ,  $R_3$  und  $R_5$ , bei gegebenen Kondensatorwerten  $C_2$ ,  $C_4$  sowie die Polgüte und Polfrequenz und Verstärkung bei Bandmittenfrequenz  $A_M$ . Die Resultate werden:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{-Q_{PB}}{\omega_{PB} A_M C_2} & R_3 &= \frac{Q_{PB}}{\omega_{PB} (Q_{PB}^2 (C_2 + C_4) + C_2 A_M)} \\ R_5 &= \frac{Q_{PB} (C_2 + C_4)}{\omega_{PB} C_2 C_4} \end{aligned} \quad (3-92)$$

$A_M$  wird durch den Stufenkorrekturfaktor  $A_K$  bestimmt (siehe auch (2-32)). Wird keine zusätzliche Verstärkung/Dämpfung gefordert wird  $A_M = A_K$ . Bei zusätzlich gewünschter Verstärkung/Dämpfung wird diese zweckmässigerweise über alle Stufen gleichmässig verteilt (n-te Wurzel) und an Stufenkorrekturfaktor anmultipliziert (vgl. auch Beispiel 3-39).

**Beispiel 3-39:** Tschebyscheff Bandpass 6. Ordnung

Man realisiere einen Tschebyscheff-Bandpass mit MGK-Teilfiltern, der folgende Sperranforderung erfüllt:



**Bild 3-95:** Dämpfungsschablone für Dimensionierung in Beispiel 3-39.

**Lösung:**

**Vorgaben:**

$f_{C1} := 1000\text{Hz}$        $f_{C2} := 1200\text{Hz}$        $A_{\text{dB}} := 0.5$        $A_{\text{mdB}} := 3$   
 $f_{H1} := 700\text{Hz}$        $f_{H2} := 1700\text{Hz}$        $A_{\text{HdB}} := 40$

**Berechnungen:**

$f_M := \sqrt{f_{C1} \cdot f_{C2}}$        $f_M = 1.09545 \times 10^3 \text{ Hz}$   
 $\Omega_{C1} := \frac{f_{C1}}{f_M}$        $\Omega_{C1} = 0.91287$   
 $\Omega_{C2} := \frac{f_{C2}}{f_M}$        $\Omega_{C2} = 1.09545$   
 $\Omega_{H2} := \frac{f_{H2}}{f_M}$        $\Omega_{H2} = 1.55188$   
 $\Omega_{H1} := \frac{f_{H1}}{f_M}$        $\Omega_{H1} = 0.63901$

**BP-TP Transformation** für Bestimmung Referenztieffpass:

$D := \frac{1}{\Omega_{C2} - \Omega_{C1}}$        $D = 5.47723$   
 $\Omega_{CTP} := D \cdot \left( \frac{1}{\Omega_{C1}} - \Omega_{C1} \right)$        $\Omega_{CTP} = 1$   
 $\Omega_{HTP1} := D \cdot \left( \frac{1}{\Omega_{H1}} - \Omega_{H1} \right)$        $\Omega_{HTP1} = 5.07143$   
 $\Omega_{HTP2} := \left| D \cdot \left( \frac{1}{\Omega_{H2}} - \Omega_{H2} \right) \right|$        $\Omega_{HTP2} = 4.97059$   
 $\Omega_{HTP} := \text{wenn}(\Omega_{HTP1} < \Omega_{HTP2}, \Omega_{HTP1}, \Omega_{HTP2})$        $\Omega_{HTP} = 4.97059$       Die härtere Sperrforderung gilt!

**Min. Ordnung Referenztieffpass:**

$\epsilon := \sqrt{10^{0.1 \cdot A_{\text{mdB}}} - 1}$        $\epsilon = 0.34931$   
 $n := \frac{\text{arcosh} \left( \sqrt{\frac{A_{\text{HdB}}}{10^{0.1 \cdot A_{\text{mdB}}} - 1}} \right)}{\text{arcosh}(\Omega_{HTP})}$        $n = 2.7773$   
 $n := \text{ceil}(n)$        $n = 3$   
 $m := 0..n - 1$

**Bestimmung Tschebyscheff-Pole** der Ordnung n:

$S_{PT_m} := -\sin \left( \frac{1 + 2 \cdot m \cdot \pi}{2 \cdot n} \right) \cdot \sinh \left( \frac{1}{n} \cdot \text{arsinh} \left( \frac{1}{\epsilon} \right) \right) + j \cdot \cos \left( \frac{1 + 2 \cdot m \cdot \pi}{2 \cdot n} \right) \cdot \cosh \left( \frac{1}{n} \cdot \text{arsinh} \left( \frac{1}{\epsilon} \right) \right)$   
 $\Omega_{PT_m} := |S_{PT_m}|$       Normierte Polfrequenz Referenztieffpass       $\Omega_{PT} = \begin{pmatrix} 1.06885 \\ 0.62646 \\ 1.06885 \end{pmatrix}$   
 $S_{PT} = \begin{pmatrix} -0.31323 + 1.02193i \\ -0.62646 \\ -0.31323 - 1.02193i \end{pmatrix}$       Normierte Pole Tschebyscheff Referenztieffpass

**Tiefpass-Bandpass Transformation**

$S_{PB_{2m}} := \frac{S_{PT_m}}{2D} + \frac{\sqrt{(S_{PT_m})^2 - 4D^2}}{2D}$       Konjugiert komplexe normierte Bandpass Pole  
 $S_{PB_{2m+1}} := \frac{S_{PT_m}}{2D} - \frac{\sqrt{(S_{PT_m})^2 - 4D^2}}{2D}$       Bandpass Polgüten      Normierte Bandpass Polfrequenzen  
 $k := 0..n - 1$   
 $\Omega_{PB_k} := |S_{PB_k}|$        $Q_{PB_k} := \frac{-\Omega_{PB_k}}{2 \cdot \text{Re}(S_{PB_k})}$        $Q_{PB} = \begin{pmatrix} 17.56236 \\ 17.56236 \\ 8.74319 \end{pmatrix}$        $\Omega_{PB} = \begin{pmatrix} 0.91102 \\ 1.09767 \\ 1 \end{pmatrix}$   
 $S_{PB} = \begin{pmatrix} -0.02594 - 0.91065i \\ -0.03125 + 1.09723i \\ -0.05719 - 0.99836i \\ -0.05719 + 0.99836i \\ -0.02594 + 0.91065i \\ -0.03125 - 1.09723i \end{pmatrix}$       Normierte Pollagen von Tschebyscheff Bandpass der Ordnung 2n.

**Stufenverstärkungskorrekturfaktor:**

$A_K := \frac{1}{D} \cdot \Omega_{PT_k} \cdot Q_{PB_k}$        $A_K = \begin{pmatrix} 3.42721 \\ 2.00869 \\ 1.70619 \end{pmatrix}$       Stufenverstärkungskorrekturfaktor für jedes Bandpass Teilfilter

**Elementwerte der Teilfilter** mit MGK Bandpass. C2, C4 sind vorgegeben.  
(Alle drei Teilfilter werden simultan berechnet und erscheinen in den Vektoren,  
wobei jeweils die Elemente der gleichen Zeile zusammen gehören.)

$$C_2 := 10\text{nF} \quad C_4 := 10\text{nF} \quad (\text{Für alle Stufen}) \quad \omega_M := 2\pi \cdot f_M$$

$$A_M := -A_K \cdot \sqrt{10^{0.05 \cdot A_{\text{ndB}}}} \quad (\text{Zus. Verstärkung/Dämpfung einbringen}) \quad \omega_M = 6.88288 \times 10^3 \text{ Hz}$$

$$R_1 := \frac{-Q_{PB_k}}{\omega_M \cdot \Omega_{PB_k} \cdot A_M \cdot C_2} \quad R_1 = \begin{pmatrix} 7.28357 \times 10^4 \\ 1.0314 \times 10^5 \ \Omega \\ 6.63547 \times 10^4 \end{pmatrix} \quad A_M = \begin{pmatrix} -3.84539 \\ -2.25379 \\ -1.91438 \end{pmatrix}$$

$$R_3 := \frac{Q_{PB_k}}{\omega_M \cdot \Omega_{PB_k} \cdot \left[ (Q_{PB_k})^2 \cdot (C_2 + C_4) + C_2 \cdot A_M \right]} \quad R_3 = \begin{pmatrix} 456.88303 \\ 378.21058 \ \Omega \\ 841.39934 \end{pmatrix}$$

$$R_5 := \frac{Q_{PB_k} \cdot (C_2 + C_4)}{\omega_M \cdot \Omega_{PB_k} \cdot C_2 \cdot C_4} \quad R_5 = \begin{pmatrix} 5.60164 \times 10^5 \\ 4.64911 \times 10^5 \ \Omega \\ 2.54056 \times 10^5 \end{pmatrix}$$

**Grafik:**

$$G(s, R_1, C_2, R_3, C_4, R_5) := \frac{-R_3 \cdot R_5}{R_1 + R_3} \cdot C_4 \cdot s$$

$$1 + \left( \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} \right) \cdot (C_2 + C_4) \cdot s + \frac{R_1 \cdot R_3 \cdot R_5}{R_1 + R_3} \cdot C_2 \cdot C_4 \cdot s^2$$

Übertragungsfunktion MGK Bandpass  
2. Ordnung

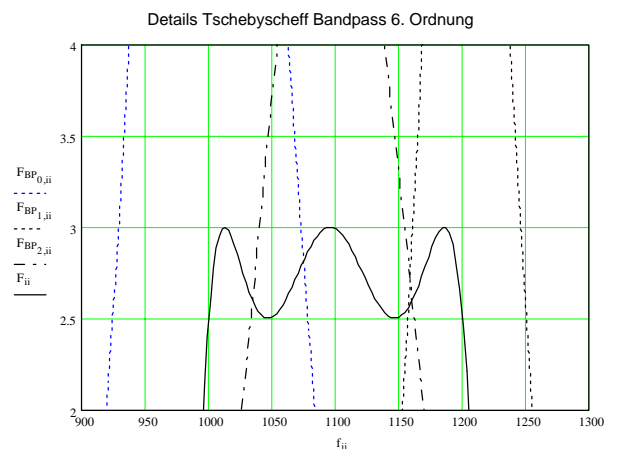
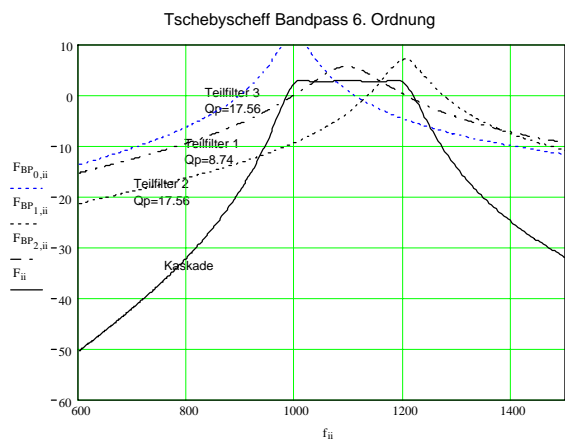
f := logrange(600, 1500, 400) Hz

ii := 0..letzte(f)

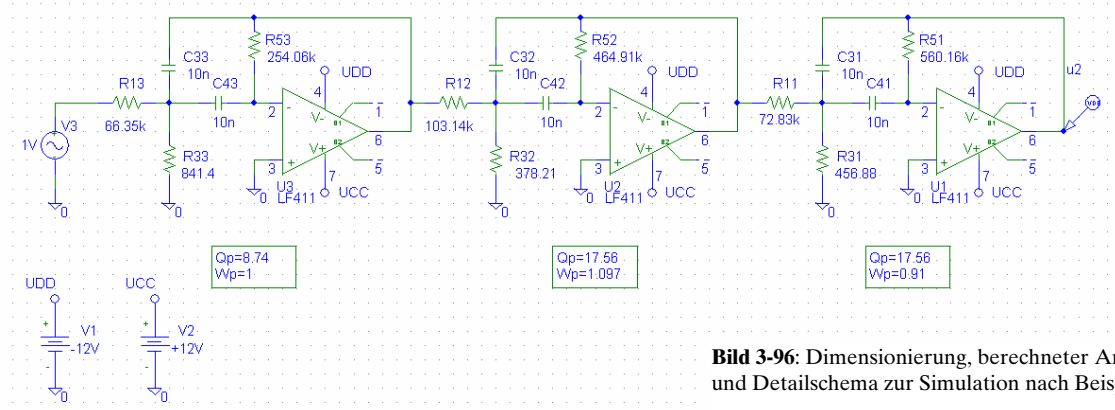
$$F_{BP_{k,ii}} := \text{dB} \left( \left| G(2\pi f_{ii}, j, R_1, C_2, R_3, C_4, R_5) \right| \right) \quad \text{Amplitudengang Teilfilter}$$

Indizes: 0 = Teilfilter 3 (wegen Qp = max)  
1 = Teilfilter 2 (wegen Qp = max)  
2 = Teilfilter 1 (wegen Qp = min)

$$F_{ii} := \sum_k F_{BP_{k,ii}} \quad \text{Amplitudengang Kaskade}$$



### Tscheybscheff Bandpass 6. Ordnung nach Beispiel 3-37

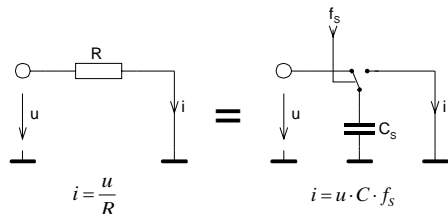


**Bild 3-96:** Dimensionierung, berechneter Amplitudengang und Detailschema zur Simulation nach Beispiel 3-39.

### 3.14 Switched Capacitor Filter (SC-Filter)

Die Theorie der SC-Filter wurde in den 60er Jahren entwickelt und durch die Firma MOS-Technologies erstmals in integrierter Schaltungstechnik auf den Markt gebracht.

Bei Switched Capacitor Filter werden die frequenzbestimmenden Widerstände durch geschaltete Kondensatoren ersetzt:



**Bild 3-97:** Ersatz von frequenzbestimmenden Widerständen durch geschaltete Kapazitäten in SC-Filter.

Durch Verändern der Schaltfrequenz kann die Grenzfrequenz des Filters variiert werden. Daher sind SC-Filter sehr flexibel, weisen aber einige Nachteile gegenüber konventionellen analogen Filtern auf.

SC-Filter sind wertekontinuierliche, zeitdiskrete Systeme. Gegenüber einem echten digitalen Filter wird keine AD/DA Wandlung benötigt, daher existiert kein Quantisierungsfehler. Trotzdem gilt wegen der Abtastung die Frequenzbeschränkung durch das Abtasttheorem ( $f < f_s/2$ ) und Dynamikbereich ist signifikant kleiner als beim analogen Filter.

SC-Filter werden von zahlreichen Herstellern direkt als IC gefertigt mit verschiedenen Charakteristiken. Sie ermöglichen eine einfache und kostengünstige Realisation vieler Filterbedürfnisse. Die Hersteller vereinfachen den an sich aufwändigen Entwurf, indem sie meist kostenlos Programme zur Dimensionierung für die jeweiligen Bausteine bereit stellen. Eine konventionelle Realisation mit elektronischen Schaltern und OpAmps ist möglich, aber nicht sinnvoll.

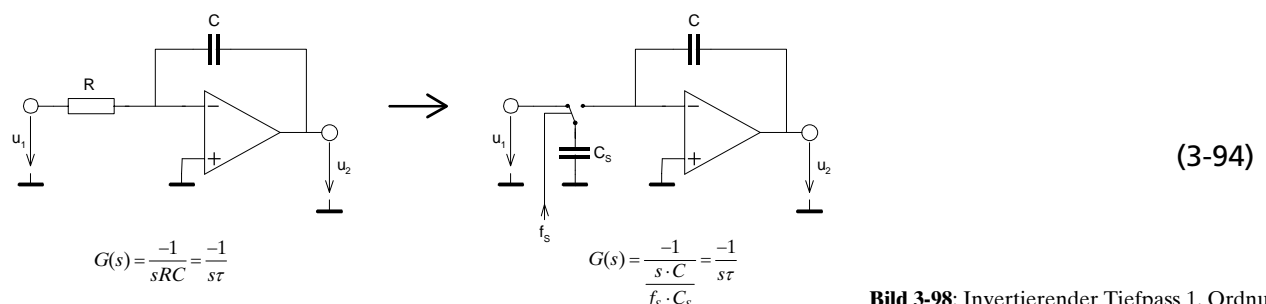
#### 3.14.1 Arbeitsweise

Alle frequenzbestimmenden Widerstände werden durch geschaltete Kapazitäten ersetzt. Der äquivalente Widerstand  $R_{eq}$  den die geschaltete Kapazität  $C_s$  darstellt ist nach Bild 3-97:

$$i = \frac{u}{R_{eq}} = u \cdot C_s \cdot f_s \quad \rightarrow \quad R_{eq} = \frac{1}{C_s \cdot f_s} \quad (3-93)$$

Der äquivalente Leitwert ist linear von der Schaltfrequenz abhängig. Diese Eigenschaft wird bei den SC-Filtern direkt ausgenutzt.

Beim invertierenden Integrator oder Tiefpass erster Ordnung wird der Widerstand R durch die geschaltete Kapazität ersetzt:



**Bild 3-98:** Invertierender Tiefpass 1. Ordnung, realisiert in RC und SC Technik.

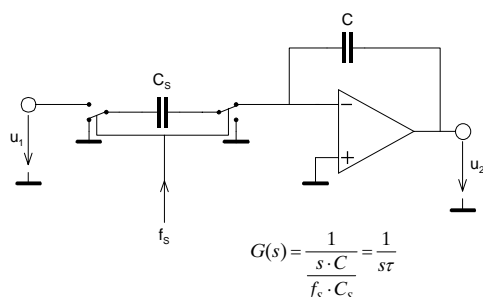


Dabei gilt:

$$\tau = RC = R_{eq}C = \frac{C}{C_s f_s} = \frac{\eta}{2\pi f_s} \quad (3-95)$$

Bei IC-Filtern ist das Kapazitätsverhältnis  $\frac{C}{C_s} = \frac{\eta}{2\pi}$  durch den Hersteller fest vorgegeben und liegt in der Größenordnung von 50..200. Ein kleineres Verhältnis ist für die Herstellung günstiger, da weniger Chipfläche benötigt wird.

Bemerkenswert ist die Tatsache, dass ein nichtinvertierender Tiefpass oder Integrator durch einfaches Vertauschen der Kondensatoranschlüsse beim Umladen realisiert werden kann. Das Vertauschen der Anschlüsse und die dadurch entstehende Vorzeichenänderung wird mit einem zweiten Umschalter vorgenommen:



**Bild 3-99:** Nichtinvertierender Tiefpass (Integrator) durch Einsatz zweier Umschalter. Die Inversion erfolgt beim Umladen indem der Kondensator umgepolt wird.

(3-96)

Aufgrund der unvermeidlichen parasitären Widerstände erfolgt das Auf- und Umladen nicht schlagartig sondern exponentiell. Dies ist an sich auch wünschenswert, da weder die Eingangsspannungsquelle noch der Operationsverstärker die hohen Ströme liefern könnten. Die parasitären Widerstände und Kapazitäten bestimmen auch die maximale Schaltfrequenz, bei der noch eine vollständige Umladung gewährleistet ist.

Die Analyse des Übertragungsverhaltens erfolgt zweckmässigerweise durch Beschreibung des Umladevorganges pro Zeiteinheit. Dem interessierten Leser sei hierzu z.B. auf [ELL94] verwiesen.

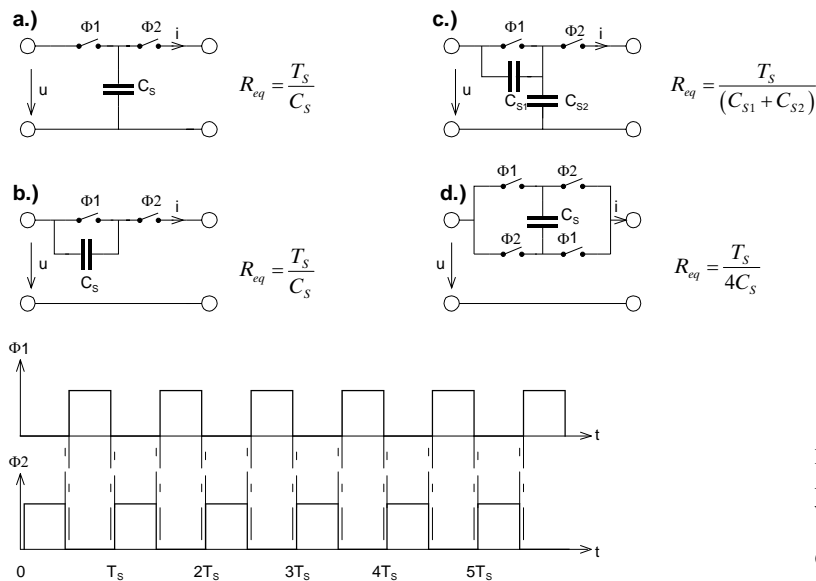
Filter 2. Ordnung werden bei SC-Filter wegen der Flexibilität häufig als State-Variable-Filter ausgeführt. Die State-Variable-Schaltung ermöglicht gleichzeitig ein TP, HP und BP Übertragungsverhalten.

### 3.14.2 Widerstandsäquivalente

Bei SC-Filter können die frequenzbestimmenden Widerstände durch verschiedenartig geschaltete Kondensatoren erzeugt werden. Sie unterscheiden sich in der Möglichkeit der Vorzeichenumkehr

während der Lade-Umladevorgänge und der Anordnung des Kondensators.

Da die Umschalter zur Umladung intern mit einfachen Schaltern realisiert werden, sind nachfolgend vier häufig verwendete Äquivalente aufgezeigt. Die Ansteuerung erfolgt mit zwei 180° phasenverschobenen, nicht überlappenden Takten  $\Phi_1, \Phi_2$ .



**Bild 3-100:** Widerstandsäquivalente für SC-Filter. Die Ansteuerung der Schalter erfolgt mit zwei phasenverschobenen, nicht überlappenden Takten  $\Phi 1$  und  $\Phi 2$ .

Quelle: [ELL94]

### 3.14.3 Z-Transformation

Zur Analyse eines abgetasteten Systems wird die frequenzdiskrete Übertragungsfunktion  $G(z)$  benötigt. Es wäre falsch in abgetasteten Systemen mit  $G(s)$  zu arbeiten. Zweck der z-Transformation ist es, aus einer frequenzkontinuierlichen Übertragungsfunktion  $G(s)$  eine frequenzdiskrete Übertragungsfunktion  $G(z)$  abzuleiten.

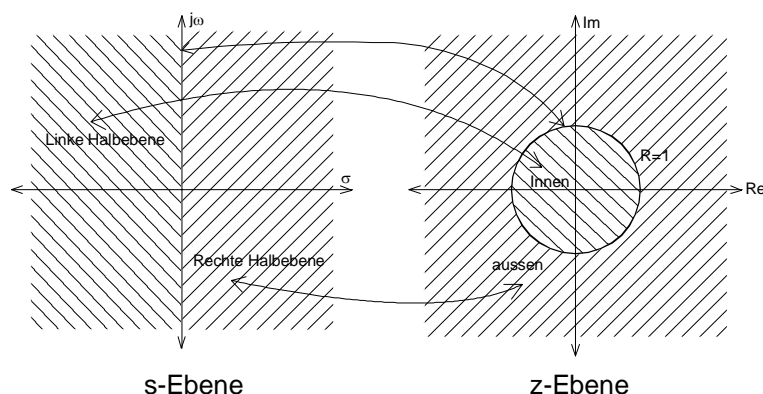
Es existieren mehrere Methoden, um diese Transformation durchzuführen. Sie unterscheiden sich im Rechenaufwand und in der Güte der Näherung. Es ist anzumerken, dass die analogen und digitalen Grenzfrequenzen exakt transformiert werden können, aber die restlichen Frequenzen eine Verzerrung erfahren.

Ziel der Ausführungen ist, Transformationsvorschriften aufzeigen damit aus bekannten analogen Filtern das zugehörige abgetastete System berechnet werden kann. Eine weitergehende Betrachtung erfolgt im Kapitel der digitalen Filter.

Wir zeigen daher rezeptartig die Bilineare Z-Transformation, ohne näher auf die komplexen Zusammenhänge einzugehen.

#### Geometrische Interpretation

Grundsätzlich bewirkt die z-Transformation eine Abbildung sämtlicher Punkte in der linken s-Halbebene in den Einheitskreis der z-Ebene. Die  $j\omega$ -Achse wird auf den Kreis abgebildet. Der Ursprung der s-Ebene im Speziellen wird auf +1 transformiert. Alle Punkte der rechten s-Halbebene werden ausserhalb des Einheitskreises abgebildet:



**Bild 3-101:** Vergleich der s- und z-Ebene bei der Z-Transformation

Zur Stabilitätsbetrachtung im digitalen System gelten dieselben Regeln wie bei der kontinuierlichen Übertragungsfunktion, jedoch im übertragenen Sinne (z.B. Pole innerhalb des Einheitskreises).

### 3.14.4 Bilineare Z-Transformation

Die Bilineare Z-Transformation erlaubt die Umrechnung von frequenzkontinuierlichen Werten in frequenzdiskrete Werte, wie sie in abgetasteten Systemen entstehen.

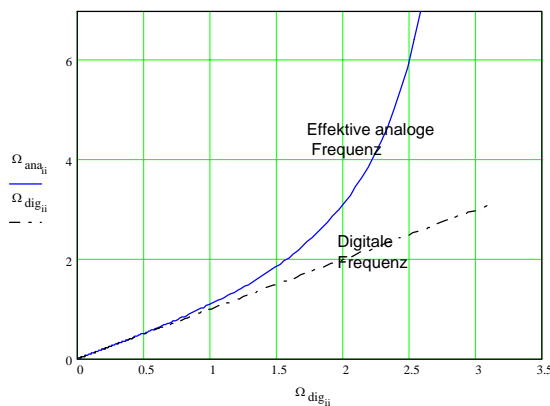
Zur Transformation definiert man die diskrete Bildvariable

$$z = e^{sT_s} \quad T_s : \text{Abtastperiodendauer} = \frac{1}{f_s} \quad (3-97)$$

und die Transformationsvorschrift:

$$s = \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1} \quad z = \frac{\frac{2}{T_s} + s}{\frac{2}{T_s} - s} \quad (3-98)$$

Die Transformation überführt alle analogen Frequenzen  $[0, \infty)$  in den Bereich der digitalen Frequenzen  $[0, \pi)$ . Während die Transformation für tiefe Frequenzen praktisch linear erfolgt, wird der höhere Frequenzbereich verzerrt. Diese Verzerrung muss beim Filterentwurf und Transformation berücksichtigt werden (sog. Prewarping). Die Verzerrung ist vor allem bei höheren Frequenzen signifikant.



**Bild 3-102:** Verzerrte Abbildung der Frequenzen bei der z-Transformation. Dies fällt vor allem bei höheren Frequenzen ins Gewicht..

Die Umsetzung der diskreten zu analogen Frequenzen folgt den Gleichungen:

$$\omega_{ana} = \frac{2}{T_s} \tan\left(\frac{\Omega_{dig}}{2}\right) = \frac{2}{T_s} \tan\left(\frac{\omega_{dig} \cdot T_s}{2}\right) = \frac{2}{T_s} \tan(\pi \cdot f_{dig} \cdot T_s) \quad \Omega_{dig} = \frac{2\pi f_{dig}}{f_s} \quad (3-99)$$

$$\omega_{dig} = \frac{2}{T_s} \operatorname{atan}\left(\frac{\omega_{ana} \cdot T_s}{2}\right) = \frac{2}{T_s} \operatorname{atan}(\pi \cdot f_{ana} \cdot T_s)$$

**Beispiel 3-40:** Z-Transformation eines Tiefpass 1.Ordnung.

Ein analoger Tiefpass 1.Ordnung mit einer Grenzfrequenz  $f_c=1\text{kHz}$  soll als abgetastetes System mit  $f_s=9.6\text{kHz}$  dargestellt werden. Man bestimme  $G(z)$  und verifiziere den resultierenden Amplitudengang mit dem Amplitudengang des analogen Tiefpass.

**Lösung:**

Der analoge Tiefpass wird:

$$G(s) = \frac{1}{1+s\tau} = \frac{1}{1+\frac{s}{6283.185}} = \frac{6283.185}{s+6283.185} \quad (\text{analog})$$

Um im digitalen System bei 1kHz die Dämpfung von 3.01dB zu erreichen, muss die Verzerrung kompensiert werden (prewarping). Das heisst, das Filter muss für eine etwas höhere Frequenz dimensioniert werden:

$$\Omega_c = \frac{2\pi f_c}{f_s} = \frac{2\pi 1000}{9600} = 0.6549 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad f_s = 9.6\text{kHz}$$

$$\omega_{cana} = \frac{2}{T_s} \tan\left(\frac{\omega_{cdig} \cdot T_s}{2}\right) = 6517.52 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$G(s) = \frac{6517.52}{s+6517.52} \quad (\text{analog,prewarped})$$

Die z-Transformation erfolgt durch Anwenden der Transformationsvorschrift indem für  $s = \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}$  eingesetzt wird und anschliessend soweit umgeformt bis wieder eine rationale

Funktion mit einem linearen Zähler- und Nennerglied mit Potenzen von  $z^{-1}$  vorliegt.  $T_s$  wird als Zahlenwert direkt eingesetzt:

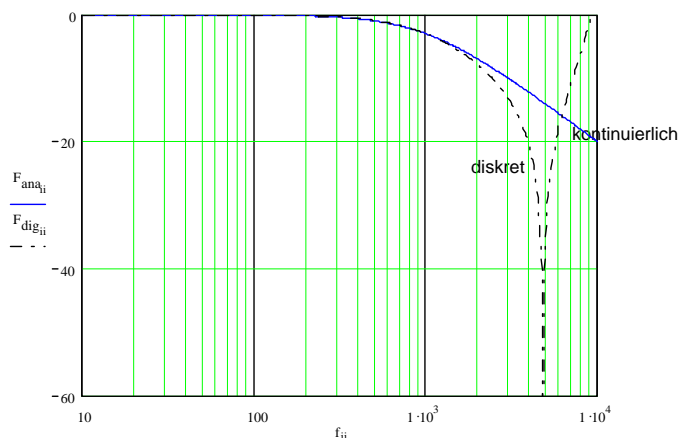
$$G(z) = G(s) \Big|_{s=\frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}} = \frac{6517.52}{\frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1} + 6517.52} = \frac{0.2534(z+1)}{z-0.49314} = \frac{0.2534 + 0.2534z^{-1}}{1-0.49314z^{-1}}$$

Die Auswertung des Amplitudenganges der digitalen Übertragungsfunktion erfolgt indem für  $z$  die Definition  $z = e^{sT_s}$  eingesetzt wird. Für das eingeschwungene System wird  $s = j\omega$  verwendet und man erhält:

$$f_S := 9.6\text{kHz} \quad T_S := \frac{1}{f_S} \quad f_C := 1\text{kHz}$$

$$f := \text{logrange}(10, 10000, 500) \text{ Hz} \quad ii := 0.. \text{letzte}(f)$$

Diskret	Kontinuierlich	
$G_{\text{dig}}(z) := \frac{0.2534 + 0.2534z^{-1}}{1 - 0.49315z^{-1}}$	$G_{\text{ana}}(s) := \frac{6283.18\text{Hz}}{s + 6283.18\text{Hz}}$	Übertragungsfunktionen
$F_{\text{dig}_{ii}} := \text{dB}\left(\left G_{\text{dig}}\left(e^{j \cdot 2\pi \cdot f_{ii} \cdot T_S}\right)\right \right)$	$F_{\text{ana}_{ii}} := \text{dB}\left(\left G_{\text{ana}}\left(j \cdot 2\pi \cdot f_{ii}\right)\right \right)$	Amplitudengänge
$\text{dB}\left(\left G_{\text{dig}}\left(e^{j \cdot 2\pi \cdot f_C \cdot T_S}\right)\right \right) = -3.011$	$\text{dB}\left(\left G_{\text{ana}}\left(j \cdot 2\pi \cdot f_C\right)\right \right) = -3.01$	Kontrollwerte der Dämpfung bei Grenzfrequenz



**Bild 3-103:** Berechnung und Vergleich des Amplitudengang des Tiefpassfilter 1. Ordnung nach Beispiel 3-40 in SC- und RC-Technik.

Im Durchlassbereich sind beide Lösungen praktisch identisch. Grosse Abweichungen zeigen sich aber im Sperrbereich. Bei  $f_S/2$  wird eine maximale Sperrdämpfung erreicht. Die ist einleuchtend, da durch die Transformation die asymptotische Sperrdämpfung des analogen Filters bei  $f_\infty$  auf  $f_S/2$  abgebildet wird.

Da alle abgetasteten Systeme eine spektrale Symmetrie zur halben Abtastfrequenz zeigen, erscheint auch hier der Amplitudengang an  $f_S/2$  gespiegelt. Dies wiederholt sich periodisch alle  $f_S$ . Einsetzbar ist das Filter aber nur bis max.  $f_S/2$ . Die analogen Frequenzen über  $f_S/2$  sind in abgetasteten Systemen sowieso Alias-Frequenzen und sind grundsätzlich nicht erwünscht.

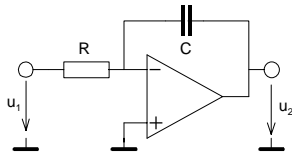
### 3.14.5 Entwurfsprozess für SC-Filter

Bei IC-Filtern ist grundsätzlich nach Herstellervorschrift vorzugehen. Meist sind hierzu Formeln und Grafiken in den Datenbüchern aufgeführt. Oft werden auch kostenlose Entwurfs- und Simulationsprogramme durch die Hersteller bereitgestellt. Sie funktionieren, d.h. unterstützen, aber meist nur für die herstellereigenen Bausteine.

[ELL94] empfiehlt mit den nachfolgenden Ausführungen, wie allgemein aus einem analogen aktiven Filter eine Realisation in SC-Technik abgeleitet werden kann:

1. Die Grenz- und Sperrfrequenzen des SC-Filters müssen für den analogen Prototyp korrigiert werden (prewarped) gemäss (3-99). Die Anforderung ist die digitale Frequenz, man erhält die zugehörige analoge (prewarped-) Frequenz.

2. Das analoge Filter wird entwickelt auf der Grundlage der Prewarp-Frequenzen.
3. Jeder Widerstand der aktiven Schaltung wird durch eine geschaltete Kapazität gemäss Bild 3-100d.) ersetzt.



$$C_s = \frac{T_s}{2R}$$

$$G(s) = \frac{-1}{sRC}$$

**Bild 3-104:** Der analoge Prototyp bildet die Grundlage für den Entwurf des SC-Filters

(3-100)

4. Weil die Schalter zweimal alle  $T_s$  Sekunden schalten, ist für  $T_s' = T_s/2$  einzusetzen: Der Kondensator wird damit:

$$C_s = \frac{T_s}{4R}$$

(3-101)

5. Ein Abtast-Halteglied (Sample-Hold) mit der doppelten Abtastfrequenz ( $1/T_s$ ) ist am Eingang einzufügen.

**Beispiel 3-41:** SC-Filter Entwurf Tiefpass 2. Ordnung.

Man realisiere ein Butterworth-TP 2. Ordnung mit Mehrfach-Gegenkopplung nach Bild 3-92 für eine Grenzfrequenz  $f_c = 1\text{kHz}$ . Der Entwurf soll für eine Sample-Frequenz von  $50\text{kHz}$  erfolgen.

**Lösung:**

Die Prewarp-Grenzfrequenz wird:

**Vorgaben:**

$f_s := 50\text{kHz}$     Samplefrequenz     $f_c := 1\text{kHz}$     Grenzfrequenz  
 $n := 2$     Filterordnung

**Prewarp-Grenzfrequenz:**

$$T_s := \frac{1}{f_s} \qquad T_s = 2 \times 10^{-5} \text{ s}$$

$$\Omega_{\text{dig}} := \frac{2\pi \cdot f_c}{f_s} \qquad \Omega_{\text{dig}} = 0.126$$

$$\omega_{\text{ana}} := \frac{2}{T_s} \tan\left(\frac{\Omega_{\text{dig}}}{2}\right) \qquad \omega_{\text{ana}} = 6.291 \times 10^3 \text{ Hz}$$

Der analoge Prototyp wird mit  $A_0 = -1$  mit dem Formelsatz (3-87) dimensioniert:

**Normierte Butterworth-Tiefpass Pole der Ordnung n :**

$$k := 0..n - 1$$

$$S_{PT_k} := -\sin\left(\frac{1+2k}{2n} \cdot \pi\right) + j \cdot \cos\left(\frac{1+2k}{2n} \cdot \pi\right)$$

$$m := 0, 1.. \text{trunc}\left(\frac{n-1}{2}\right) \quad \text{Indizes der Teilfilter} \quad S_{PT} = \begin{pmatrix} -0.707 + 0.707i \\ -0.707 - 0.707i \end{pmatrix}$$

**Normierte Polfrequenzen und Polgüten:**

$$\Omega_{P_m} := |S_{PT_m}| \quad Q_{P_m} := \frac{-\Omega_{P_m}}{2\text{Re}(S_{PT_m})} \quad \Omega_P = (1) \quad Q_P = (0.707)$$

**Dimensionierungsformeln MGK 2.Ordnung bei gegebenen Kondensatorwerten C3,C5 und A0=1:**

**Vorgaben:**  $C_5 := 25\text{pF}$  Wahl  
 $Q_P = 0.707107$   $\Omega_P = 1$  Normiert Butterworth Polfrequenz und -Güte  
 $\omega_C = 6.291 \times 10^3 \text{ Hz}$  Prewarp-Grenzkreisfrequenz

**Berechnung analoger Prototyp:**

$$C_{3\text{min}} := 8Q_P^2 \cdot C_5 \quad C_{3\text{min}} = 1 \times 10^{-10} \text{ F} \quad [F] \quad C_3 := C_{3\text{min}} \quad (\text{Wahl})$$

$$R_{21} := \frac{1}{2 \cdot \omega_C \cdot \Omega_P \cdot Q_P} \cdot \frac{C_3 + \sqrt{C_3^2 - 4 \cdot Q_P^2 \cdot C_3 \cdot C_5 \cdot 2}}{C_3 \cdot C_5} \quad R_{21} = 4.49566 \times 10^6 \Omega$$

$$R_{22} := \frac{1}{2 \cdot \omega_C \cdot \Omega_P \cdot Q_P} \cdot \frac{C_3 - \sqrt{C_3^2 - 4 \cdot Q_P^2 \cdot C_3 \cdot C_5 \cdot 2}}{C_3 \cdot C_5} \quad R_{22} = 4.496 \times 10^6 \Omega$$

Wahl:  $R_2 := R_{21}$

$$R_1 := R_2 \quad R_2 = 4.496 \times 10^6 \Omega$$

$$R_4 := \frac{1}{(\omega_C \cdot \Omega_P)^2 \cdot R_2 \cdot C_3 \cdot C_5} \quad R_4 = 2.248 \times 10^6 \Omega$$

$R_1 = 4.496 \times 10^6 \Omega$  Elementwerte des analogen Prototyps

$$C_3 = 1 \times 10^{-10} \text{ F}$$

$$C_5 = 2.5 \times 10^{-11} \text{ F}$$

Die Widerstände  $R_p$ ,  $R_2$ ,  $R_4$  werden nun durch geschaltete Kapazitäten des Typs d.) nach Bild 3-100 ersetzt:

**Geschaltete Kapazitäten bestimmen:**

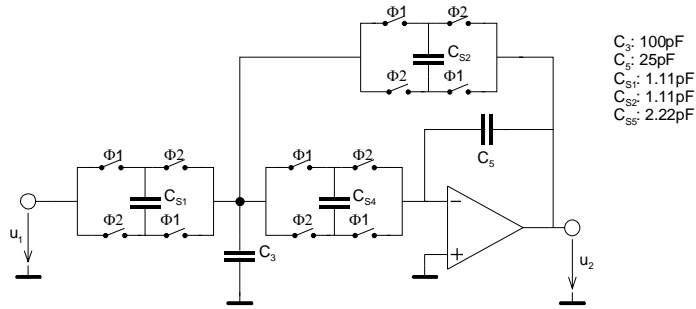
$$R1: \quad C_{S1} := \frac{T_S}{4 \cdot R_1} \quad C_{S1} = 1.112 \times 10^{-12} \text{ F}$$

$$R2: \quad C_{S2} := \frac{T_S}{4 \cdot R_2} \quad C_{S2} = 1.112 \times 10^{-12} \text{ F}$$

$$R4: \quad C_{S4} := \frac{T_S}{4 \cdot R_4} \quad C_{S4} = 2.224 \times 10^{-12} \text{ F}$$

Das gesamte Filter wird nun wie im Bild 3-105 dargestellt, realisiert. Bei Fertigung in integrierter Schaltungstechnik würde man den kleinsten Kondensator der Schaltung so gross wählen wie die kleinstmögliche herstellbare Kapazität auf dem Chip. Alle anderen Kondensatoren werden entsprechend skaliert.

Die gezeigte Lösung zeigt Empfindlichkeit für parasitäre Kapazitäten. Durch weitere Umformungen der Schaltung kann eine unempfindliche Variante gegenüber parasitären Kapazitäten gefunden werden (vgl. auch [ELL94], S.215).



**Bild 3-105:** Detailschema des SC-Tiefpassfilters 2. Ordnung mit Mehrfach-Gegenkopplung nach Beispiel 3-41.

**Beispiel 3-42:** Bestimmung  $G(z)$  eines SC-Filters.

Man bestimme die diskrete Übertragungsfunktion  $G(z)$  des Tiefpass aus Beispiel 3-41 und bestimme den Amplitudengang für den nutzbaren Frequenzbereich.

**Lösung:**

In einem ersten Schritt wird die analoge Übertragungsfunktion  $G(s)$  z-transformiert, indem man (3-98) in  $G(s)$  anwendet:

$$G(z) = G(s) \Big|_{s = \frac{2z-1}{T_s z+1}} = \frac{\frac{-R_2}{R_1}}{1 + \left( \frac{R_2 R_4}{R_1} + R_2 + R_4 \right) C_5 \cdot s + R_2 R_4 C_3 C_5 s^2} \Bigg|_{s = \frac{2z-1}{T_s z+1}} = \frac{\frac{-R_2}{R_1}}{1 + \left( \frac{R_2 R_4}{R_1} + R_2 + R_4 \right) C_5 \cdot \frac{2z-1}{T_s z+1} + R_2 R_4 C_3 C_5 \left( \frac{2z-1}{T_s z+1} \right)^2}$$

Durch Anwenden von (3-101) werden die Widerstände durch die geschalteten Kapazitäten ersetzt:

$$G(z) = \frac{-4C_{S1}C_{S4}(z^2 + 2z + 1)}{\left( 4C_{S4}C_{S2} + C_5(2C_{S4} + 2C_{S1} + C_3 + 2C_{S2}) \right) z^2 + (8C_{S2}C_{S4} - 2C_3C_5)z + C_5(C_3 - 2C_{S1} - 2C_{S2} - 2C_{S4}) + 4C_{S2}C_{S4}}$$

$$= \frac{-4C_{S1}C_{S4}(1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{4C_{S4}C_{S2} + C_5(2C_{S4} + 2C_{S1} + C_3 + 2C_{S2})z^{-1} + (C_5(C_3 - 2C_{S1} - 2C_{S2} - 2C_{S4}) + 4C_{S2}C_{S4})z^{-2}}$$

Der Amplitudengang wird durch Auswerten von  $dB|G(z)|$  mit  $z = e^{j\omega T_s}$  bestimmt. Der nutzbare Frequenzbereich geht bis  $f/2$ , wie man im Graphen sieht:



**Grafik:**

$$T_S := 20 \mu\text{s}$$

$$f_C = 1 \times 10^3 \text{ Hz}$$

$$f := \text{logrange}(10, 50000, 1000) \text{ Hz}$$

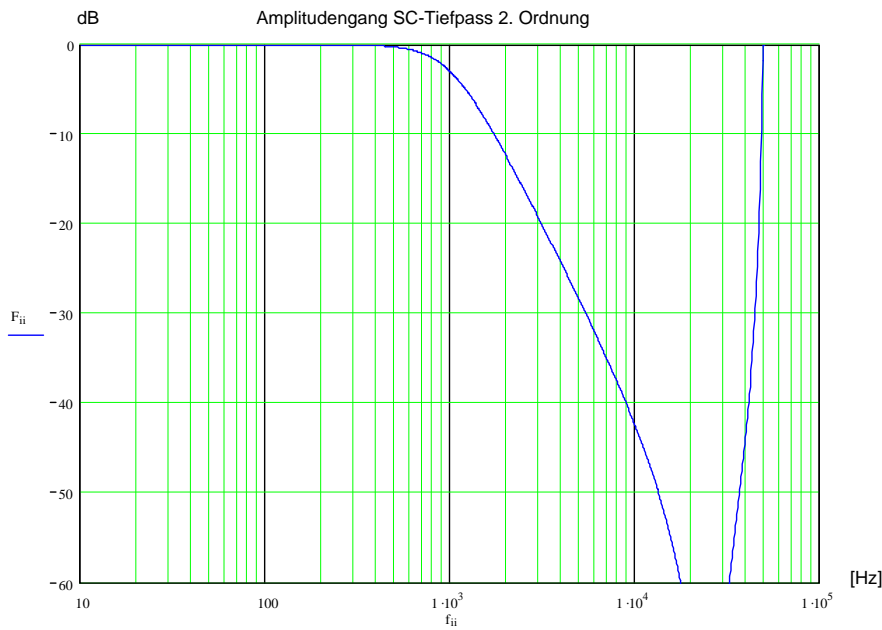
$$ii := 0.. \text{letzte}(f)$$

$$G(z) := \frac{-4C_{S1} \cdot C_{S4} - 8C_{S1} \cdot C_{S4} z^{-1} - 4C_{S1} \cdot C_{S4} z^{-2}}{[4C_{S4} C_{S2} + C_5(2C_{S4} + 2C_{S1} + C_3 + 2C_{S2})] + (8C_{S2} C_{S4} - 2C_3 C_5) z^{-1} + [C_5(C_3 - 2C_{S1} - 2C_{S2} - 2C_{S4}) + 4C_{S2} C_{S4}] z^{-2}}$$

Frequenzdiskrete  
Übertragungsfunktion

$$F_{ii} := \text{dB}\left(\left|G e^{j 2 \pi \cdot f_{ii} \cdot T_S}\right|\right) \quad \text{Amplitudengang}$$

$$\text{dB}\left(\left|G e^{j 2 \pi \cdot f_C \cdot T_S}\right|\right) = -3.01 \quad \text{Kontrollwert der Dämpfung bei Grenzfrequenz}$$



**Bild 3-106:** Berechneter Amplitudengang des SC-Tiefpassfilters 2. Ordnung mit Mehrfach-Gegenkopplung nach Beispiel 3-41.

### 3.15 Literaturverzeichnis zu Kapitel 3

In den einzelnen Abschnitten wurde auf folgende Referenzen und weiterführende Literatur verwiesen:

- [CHE95] The Circuits and Filters Handbook, Wai-Kai Chen, CRC Press-IEEE Press, 1995 ISBN 0.8493-8341-2.
- [CUT83] Circuit Design Using Personal Computers, Thomas R. Cuthbert Jr., John Wiley & Sons 1983, ISBN0-47-87700-X.
- [DAN74] Approximation Methods for Electronic Filter Design, Richard W. Daniels, McGraw-Hill 1974, ISBN 0-07-015308-6.
- [ELL94] Electronic Filter Analysis and Synthesis, Michael G. Ellis, 1994, Artech House, ISBN 0-89006-616-7.
- [FRA97] Design with Operational Amplifiers and Analog Integrated Circuits, S. Franco, WCB/McGraw-Hill 1997, 2. ed., ISBN 0-07-115722-0
- [HER84] Aktive RC-Filter, 1984, Miklos Herpy/ Jean-Claude Berka, 1984, Franzis Verlag, ISBN 3-7723-7011-X.
- [LAN94] Das Aktiv Filter Kochbuch, Don Lancaster, IWT Verlag 1994. 8. Aufl. (Übersetzung von ‚Active Filter Cookbook ‚1981), ISBN 3-883222-007-8.
- [MIL92] Entwurf analoger und digitaler Filter, Otto Mildenerger, Vieweg Verlag 1992, ISBN 3.528-06430-7.
- [SAA79] Handbuch zum Filterentwurf, Rudolf Saal, AEG Telefunken Verlagsgesellschaft 1979, ISBN 3-87087-070-0.
- [STO54] Synthesis of Constant-Time-Delay Ladder Networks Using Bessel Polynomials, L. Storch, Proc. IEEE, November 1954, p. 1666-1675
- [TIE99] Halbleiter Schaltungstechnik, U.Tietze/ Ch. Schenk, Springer Verlag 1999, 11. Aufl., ISBN 3-540-64192-0.
- [VLA94] Computer Methods for Circuit Analysis and Design 2. Ed., Jiri Vlach/ Kishore Singhal, ITP Thomson Publishing 1994, ISBN 0-442-01194-6.
- [WIL88] Electronic Filter Design Handbook: LC, Active, and Digital Filters 2. Ed, Arthur B. Williams, Fred J. Taylor, McGraw-Hill Companies 1988, ISBN 0-07-070434-1.
- [WUP94] Professionelle Schaltungstechnik mit Operationsverstärkern, Horst Wupper, 1994, Franzis Verlag , ISBN 3-7723-6732-1.
- [ZVE67] Handbook of Filter Synthesis, Anatol Zverev, John Wiley & Sons Inc. 1967, ISBN 0-471-98680-1.